UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

Phys J.

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1847

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

SEPTIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

G. HUMBERT, E. PICARD.

TOME PREMIER. — ANNÉE 1915.

(80e Volume de la Collection.)

14.030
3/2/16.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1915

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s7journaldemat01liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les fonctions permutables de première espèce de M. Volterra;

PAR JOSEPH PÉRÈS.

INTRODUCTION.

La théorie des fonctions permutables de première espèce, c'est-à-dire telles que

$$\int_x^y f(x,\xi)\,\varphi(\xi,y)\,d\xi = \int_x^y \varphi(x,\xi)\,f(\xi,y)\,d\xi$$

a été développée par M. Volterra qui en indiquait, dès son premier Mémoire [1], les applications essentielles à la théorie des équations intégrales et intégro-différentielles. Dans deux Mémoires successifs [2], M. Volterra étudiait le problème fondamental de cette théorie [détermination des fonctions permutables avec une fonction donnée

(1) *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* (*Rend. Lincei*, 1er semestre 1910).

(2) *Sopra le funzioni permutabili* (*Rend. Lincei*, 1er semestre 1910) et *Contributo allo studio delle funzioni permutabili* (*Rend. Lincei*, 1er semestre 1911).

$f(x, y)$ dans le cas où cette fonction est d'ordre 1 ou 2 (¹)] et montrait l'intérêt qu'aurait, pour introduire dans la théorie des fonctions permutables le symbole $\sqrt[n]{}$, la détermination des fonctions permutables avec une fonction d'ordre n. M. Vessiot démontrait (²) une propriété importante des fonctions permutables avec une fonction donnée : elles sont permutables entre elles, et étendait aux fonctions permutables la théorie des groupes. Enfin les équations intégro-différentielles de la physique héréditaire ont été étudiées grâce à la théorie des fonctions permutables par M. Volterra, M. Evans et moi-même (³).

Le but principal de ce travail est la détermination des fonctions permutables avec une fonction donnée et l'étude de ces fonctions.

Dans le premier Chapitre je rappelle d'abord les éléments de la théorie des fonctions permutables et son application à la théorie des équations intégrales d'après M. Volterra; je donne ensuite deux extensions de cette application (§ II), l'une en laissant tomber la condition de permutabilité, l'autre en ne faisant, sur la série des compositions qui définit l'équation intégrale, que les hypothèses de convergence les plus larges possibles. Je n'ai pas indiqué les extensions analogues qu'on peut faire dans la théorie des équations intégro-différentielles. La fin de ce Chapitre est consacrée à quelques compléments (§ III), nécessaires pour la suite, de la théorie de l'équation de Volterra de première espèce

$$\int_x^y \varphi(x, \xi) f(\xi, y)\, d\xi = F(x, y) \qquad [\text{inconnue } \varphi(x, y)];$$

quand les données sont analytiques la solution est une fonction en général multiforme. Les différentes branches se permutent autour

(¹) M. Volterra dit qu'une fonction est d'ordre n quand elle admet $(y-x)^{n-1}$ en facteur, ses dérivées $(n-1)^{\text{ièmes}}$ étant différentes de zéro pour $y = x$ (*cf.* Chap. I, n° 11).

(²) *Comptes rendus*, 1er semestre 1912, p. 571 et 683.

(³) Pour ces recherches, dont nous ne nous occuperons pas ici, comme pour les précédentes, nous renverrons au Livre de M. Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes* (Gauthier-Villars, 1913).

des points où le noyau $f(x, y)$ cesse d'être d'un ordre déterminé; j'ai entièrement étudié dans quelles circonstances un de ces points, soit $x = y = a$, sera un point régulier de la solution : il faut, et j'indique un procédé pour reconnaître si cette circonstance se présente, qu'il existe un développement $\Sigma c_{pq}(x-a)^p(y-a)^q$ satisfaisant formellement à l'équation; cela suffit pour qu'on puisse affirmer la convergence de ce développement qui définit donc bien une solution régulière pour $x = y = a$.

Dans le Chapitre II, j'ai étudié la méthode donnée par M. Volterra pour déterminer les fonctions permutables avec une fonction donnée. J'expose d'abord, avec de très légers compléments [1], son raisonnement pour une fonction donnée du premier ordre. J'en expose ensuite une généralisation quand la fonction donnée est d'ordre n quelconque. Une grave difficulté se présente dès que $n > 2$: on a, dans la suite des calculs, à résoudre un problème de Cauchy pour une équation aux dérivées partielles à caractéristiques imaginaires. Ceci m'a obligé à me restreindre, je l'ai fait presque toujours dans ce travail, aux fonctions analytiques. La méthode ainsi obtenue me donne une propriété importante des fonctions permutables avec $f(x, y)$: elles n'ont, sur la multiplicité $y = x$, pas d'autres singularités que les points où $f(x, y)$ cesse d'être d'un ordre déterminé [et bien entendu les points singuliers de $f(x, y)$].

L'étude de la méthode précédente autour d'un de ces points me fournit (Chap. III, § I) un cas important où les fonctions $\varphi(x, y)$ seront régulières autour de ce point.

Dans le même Chapitre j'expose aussi l'application de la recherche précédente à l'introduction dans la théorie des fonctions permutables de la racine $n^{\text{ième}}$, c'est-à-dire à la résolution de l'équation

$$\text{(E)} \qquad \overset{*}{\varphi}{}^{n}(x, y) = f(x, y).$$

Elle admet, à un facteur $\sqrt[n]{1}$ près, une solution qui est permutable avec $f(x, y)$ et admet donc en général comme singularités les points

[1] Par exemple la convergence des dérivées premières de φ (*cf.* p. 35).

$x = y = a$ où $f(x, y)$ cesse d'être d'un ordre déterminé. J'étudie, par une méthode analogue à celle qui m'a servi pour l'équation de Volterra de première espèce (Chap. I), le cas où $\varphi(x, y)$ est régulier autour d'un de ces points $x = y = a$; cette méthode constitue de plus un procédé direct de résolution de l'équation (E). Une autre méthode directe, la plus avantageuse lorsqu'elle est applicable, permet de faire comprendre la difficulté que présente l'étude générale de la singularité de $\varphi(x, y)$ autour de $x = y = a$: cette étude peut se réduire à celle des singularités dans tout le plan d'une équation intégrale non linéaire dont l'inconnue est fonction d'une seule variable (§ III).

La méthode de recherche des fonctions permutables que j'expose au Chapitre IV permet de pousser plus loin l'étude de ces fonctions : elle se rapproche de celle que j'ai indiquée (Chap. I) pour étudier l'équation de Volterra et est limitée *par essence* à la recherche des fonctions permutables avec une fonction analytique. Je prouve d'abord (c'est la réciproque d'un résultat presque immédiat) que toutes les fonctions analytiques permutables avec une *fonction $f(x, y)$ n'admettant pas $y - x$ en facteur* sont susceptibles d'un développement convergent de la forme

$$(1) \qquad a_0 f(x, y) + a_1 \overset{*}{f}{}^2(x, y) + \ldots + a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y) + \ldots;$$

la convergence d'un tel développement s'exprimant par le fait que la série de puissances

$$(1') \qquad a_0 + a_1 \frac{z}{1!} + \ldots + a_n \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

converge. Il en résulte que ces fonctions permutables avec $f(x, y)$ n'ont pas, contrairement à ce que pouvait faire supposer la méthode du Chapitre II, pour points singuliers les points où $f(x, y)$ cesse d'être du premier ordre : la méthode du Chapitre II donnerait une idée très imparfaite de l'allure des fonctions permutables autour d'un de ces points; on peut en effet se rendre compte qu'elle conduirait à définir ces fonctions qui sont holomorphes, par des séries de fonctions présentant des singularités. C'est pour cette raison que je n'ai étudié que très brièvement, au Chapitre III, la méthode du Chapitre II

autour d'un point où $f(x, y)$ cesse d'être d'un ordre déterminé, me contentant de me placer dans le seul cas particulier où l'on puisse obtenir un résultat précis.

En m'appuyant sur les résultats précédents et sur la méthode du Chapitre II, je montre ensuite que toutes les fonctions de variables réelles permutables avec $f(x, y)$ admettent un développement convergent, non en une série de puissances symboliques telle que (1), mais en une série de polynomes symboliques. Une nouvelle analogie remarquable se développe ainsi entre l'ensemble, dépendant d'une fonction d'une variable, des fonctions permutables avec $f(x, y)$ et l'ensemble des fonctions d'une variable : l'ensemble des fonctions d'une variable n'est d'ailleurs que l'ensemble particulier des fonctions permutables avec l'unité.

Le cas où la fonction $f(x, y)$ admet $(y - x)^n$ en facteur se réduit au précédent après résolution d'une équation

$$\text{(E)} \qquad \overset{*}{\varphi}{}^n(x, y) = f(x, y).$$

Les fonctions analytiques permutables avec f admettent alors en général comme singularités les points $x = y = a$ où f cesse d'être d'ordre $n - 1$. Dans l'ordre d'idées qui nous a préoccupé, deux questions se posaient encore : Dans quel cas le point $x = y = a$ sera-t-il régulier pour toutes les fonctions permutables avec $f(x, y)$? Lorsque cette circonstance ne se produit pas, quelle est la forme de toutes les fonctions permutables avec f qui soient holomorphes autour de $x = y = a$?

J'ai répondu à la première de ces questions. Une étude plus approfondie de la singularité des fonctions permutables avec f autour de $x = y = a$ me semble nécessaire avant de répondre à la seconde (*cf.* n° **19**, Chap. IV). Cette étude devra être entreprise, non pas, pour les raisons indiquées plus haut, par les méthodes du Chapitre II, mais plutôt en la reliant à celle des singularités de l'équation (E), équation qu'il faudra s'efforcer (*cf.* Chap. III, § III) d'étudier directement.

CHAPITRE I.

COMPOSITION ET PERMUTABILITÉ. APPLICATIONS A LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS INTÉGRALES.

I. — Les fonctions permutables; premières applications à la résolution d'équations intégrales.

1. Soient $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ deux fonctions finies et continues des variables x et y lorsque (*fig.* 1)

$$(d) \qquad a \leqq x \leqq y \leqq b;$$

M. Volterra nomme *composition* [1] de ces deux fonctions l'opération

$$\int_x^y F_1(x, \xi) F_2(\xi, y)\, d\xi.$$

Le résultat de cette opération est une nouvelle fonction de x et

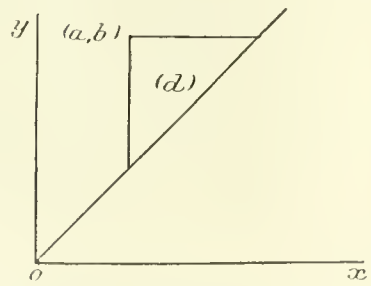


Fig. 1.

de y, finie et continue dans le même domaine de valeurs pour x et y, que M. Volterra nomme

$$\overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2(x, y) \quad \text{ou simplement} \quad \overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2.$$

---

[1] M. Volterra nomme cette opération *composition de première espèce* pour la distinguer d'une *composition de deuxième espèce* qu'il étudie aussi. Comme dans ce travail nous ne considérons que la *composition de première espèce*, nous la nommons simplement *composition*.

Cette notation est destinée à mettre en évidence l'analogie de la composition avec un produit, analogie que nous allons maintenant développer.

2. Tout d'abord l'opération *composition* est, comme l'opération *produit*, associative. Il est en effet aisé de vérifier qu'on a

$$(\overset{*}{F}_1\overset{*}{F}_2)\overset{*}{F}_3 = \overset{*}{F}_1(\overset{*}{F}_2\overset{*}{F}_3),$$

F_3 étant une nouvelle fonction finie et continue dans le domaine (d) et les parenthèses servant à indiquer, comme dans la théorie de la multiplication, l'ordre dans lequel on fait les opérations.

L'analogie avec le produit sera complète si la composition est aussi commutative, si l'on a

$$\overset{*}{F}_1\overset{*}{F}_2 = \overset{*}{F}_2\overset{*}{F}_1.$$

Il est évident que ce n'est pas le cas général. Mais c'est un cas très important : nous dirons alors, avec M. Volterra, que les fonctions F_1 et F_2 sont permutables [1].

3. L'étude des fonctions permutables est le but principal de ce travail. Nous allons déjà, au cours de ce paragraphe, en montrer l'intérêt en indiquant l'application qu'en fit M. Volterra à la résolution de certaines équations intégrales.

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des fonctions de x et de y permutables entre elles et définies dans le même domaine (d) précédent. Il sera naturel de noter

$$\overset{*}{F}_1\overset{*}{F}_2\ldots\overset{*}{F}_n(x, y) \quad \text{ou} \quad \overset{*}{F}_1\overset{*}{F}_2\ldots\overset{*}{F}_n$$

la fonction obtenue en composant F_1 avec F_2, le résultat avec F_3, etc., et de noter

$$\overset{*}{F}{}_1^{p_1}\overset{*}{F}{}_2^{p_2}\ldots\overset{*}{F}{}_n^{p_n}$$

la fonction obtenue en composant p_1 fonction F_1, p_2 fonctions F_2, etc.

Plus généralement, soit $\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ un polynome des

---

[1] Ou permutables de première espèce [*cf.* note [1], page précédente].

variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ n'ayant pas de terme constant [1]. Si l'on y remplace les variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ par $F_1, F_2, \ldots, F_n$ et qu'on y interprète les produits de $F_1, F_2, \ldots, F_n$ comme représentant des compositions, on obtiendra une fonction de x et de y, toujours définie dans le domaine (d) et qu'il est naturel de noter

$$\varphi(\dot{F}_1, \dot{F}_2, \ldots, \dot{F}_n).$$

Il est alors aisé de vérifier que :

α. *Un polynome symbolique tel que* $\varphi(\dot{F}_1, \dot{F}_2, \ldots, \dot{F}_n)$ *définit une fonction permutable avec* $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

β. *On peut faire les additions et les compositions des polynomes symboliques* $\varphi(\dot{F}_1, \dot{F}_2, \ldots, \dot{F}_n)$ *comme les additions et les multiplications des polynomes ordinaires* $\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, *en interprétant toujours les produits des fonctions* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *comme des compositions.*

Ainsi on aura

$$(\dot{F}_1 + 2\dot{F}_2)^n = \dot{F}_1^n + 2n\dot{F}_1^{n-1}\dot{F}_2 + \ldots + 2^n\dot{F}_2^n,$$
$$(\dot{F}_1 + 2\dot{F}_2)^n(\dot{F}_1 + 2\dot{F}_2)^p = (\dot{F}_1 + 2\dot{F}_2)^{n+p}.$$

On peut aller plus loin; on peut, dans ce qui précède, supposer que $\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ soit une série quelconque des puissances de ces variables

$$(1) \qquad \sum_0^\infty{}_{i_1} \sum_0^\infty{}_{i_2} \cdots \sum_0^\infty{}_{i_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n},$$

holomorphe autour de $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$ et privée de terme constant

$$a_{0,0,\ldots,0} = 0.$$

Il ne pourrait y avoir de difficultés que pour la convergence, mais il

---

[1] On peut éviter cette restriction par une extension, très simple, mais dont je n'ai nul besoin, de la notion de composition (*cf.* VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, p. 138, β).

est bien clair que la série

$$(2) \qquad \sum_{0}^{\infty}{}_{i_1} \sum_{0}^{\infty}{}_{i_2} \cdots \sum_{0}^{\infty}{}_{i_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \overset{*}{F}{}_1^{i_1} \overset{*}{F}{}_2^{i_2} \ldots \overset{*}{F}{}_n^{i_n}$$

converge absolument et uniformément si les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont bornées. On a en effet

$$|\overset{*}{F}{}_1^{i_1} \overset{*}{F}{}_2^{i_2} \ldots \overset{*}{F}{}_n^{i_n}| < \frac{m^{i_1+i_2+\ldots+i_n}}{(i_1+i_2+\ldots+i_n-1)!} |y-x|^{i_1+i_2+\ldots+i_n-1}$$

et

$$|a_{i_1 i_2 \ldots i_n}| < \frac{M}{R_1^{i_1} R_2^{i_2} \ldots R_n^{i_n}} \quad (^1).$$

4. Un grand intérêt des considérations précédentes est qu'elles fournissent, comme l'a montré M. Volterra, la solution immédiate de toute une catégorie d'équations intégrales : en général de toute relation implicite exprimée par une série telle que (1) et dont on connaît une solution analytique on déduira une équation intégrale exprimée par une série telle que (2) dont on connaîtra une solution.

Précisons : soit une relation implicite par rapport à la variable z

$$(a) \qquad z = \varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n, z)$$

φ étant une fonction holomorphe des variables $z, z_1, z_2, \ldots, z_n$ autour de $z = z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$ dont le développement en série

---

(1) Nous avons supposé dans tout ce qui précède que $F_1, F_2, \ldots, F_n$ étaient définies dans le domaine (d) $a \leqq x \leqq y \leqq b$. Ce domaine est tel, et c'est essentiel, que toute fonction composée à partir de $F_1, F_2, \ldots, F_n$ soit définie dans le même domaine. Il est clair qu'on pourrait le remplacer par tout domaine du plan des xy jouissant de cette propriété. Il est d'ailleurs aisé de voir qu'un tel domaine doit être tel que, s'il contient un point (x, y), il contienne aussi les parallèles aux axes menées de ce point jusqu'à la première bissectrice : il peut donc être engendré par des domaines

$$a \leqq x \leqq y \leqq b$$

et par des domaines tout semblables

$$a \leqq y \leqq x \leqq b.$$

n'ait ni terme constant, ni terme en z. Il est classique, et l'on démontre par la méthode des fonctions majorantes, qu'elle admet une solution

$$(b) \qquad z = \psi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

holomorphe autour de $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$ et n'ayant pas de terme constant dans son développement.

Les séries (a) et (b) sont de type (1), n° 3. Remplaçons-y $z_1, z_2, \ldots, z_n, z$ par des fonctions permutables $F_1, F_2, \ldots, F_n, F$ définies dans le domaine (d) et envisageons les produits de ces fonctions comme des compositions. Nous aurons :

Une équation intégrale

$$(a') \qquad F = \varphi(\dot{F}_1, \dot{F}_2, \ldots, \dot{F}_n, \dot{F})$$

dont la solution, d'ailleurs unique [1], *sera donnée dans le domaine* (d) *par la formule*

$$(b') \qquad F = \psi(\dot{F}_1, \dot{F}_2, \ldots, \dot{F}_n)$$

représentant une fonction permutable avec les fonctions données.

M. Volterra a fait remarquer que l'équation (a') est, en un sens, plus simple que l'équation implicite ordinaire (a) : la série (b') en donne la solution quelles que soient les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_n$, tandis que la série (b) ne convergeait et ne donnait la solution de (a) qu'au voisinage de l'origine $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$.

5. Avant de passer à des extensions du résultat précédent, nous ferons une remarque : on pourrait songer à résoudre l'équation (a') par approximations successives en formant la série

$$(b'') \qquad F = F^{(0)} + (F^{(1)} - F^{(0)}) + \ldots + (F^{(p)} - F^{(p-1)}) + \ldots$$

avec

$$F^{(0)} = 0, \qquad F^{(p)} = \varphi(\dot{F}_1, \dot{F}_2, \ldots, \dot{F}_n, \dot{F}^{(p-1)});$$

---

[1] Un lecteur familiarisé avec les méthodes d'approximations successives n'aura pas de peine à démontrer que l'équation (a') n'a pas d'autre solution permutable ou non avec les fonctions données $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

On sera ainsi conduit à définir la solution $F(x, y)$ non plus par une série de compositions, mais par une série de séries de compositions. La démonstration directe de la convergence de cette série dans *tout* le domaine (d) est plus compliquée que la même démonstration pour la série (b') du n° 4. Cette démonstration est d'ailleurs inutile; la convergence de la série des approximations successives résulte nécessairement de celle de la série (b'). C'est un fait tout à fait général dont je donnerai ailleurs la démonstration : toutes les fois que, pour résoudre un problème de fonctions implicites, pour déterminer l'intégrale d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles, on peut employer parallèlement la méthode des fonctions majorantes et une méthode d'approximations successives, les approximations successives convergent sûrement dans tout domaine où la méthode des fonctions majorantes permet de définir la solution [1].

II. — Extensions du résultat précédent.

6. Nous montrerons dans ce paragraphe comment des équations intégrales, plus générales encore que les équations (a') traitées par M. Volterra, peuvent être résolues par des procédés analogues.

Voici une première extension. Supposons que la série

$$\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n, z) = \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_n j} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n} z^j$$

ne soit pas convergente autour de $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z = 0$, mais que la série

$$\sum \frac{a_{i_1 i_2 \ldots i_n j}}{(i_1 + i_2 + \ldots + i_n + j)!} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n} z^j$$

---

[1] C'est un résultat peu surprenant : on sait qu'il est vrai pour les équations différentielles linéaires.

D'autre part, quand on applique, avec M. Goursat, la méthode des fonctions majorantes au théorème d'existence de la solution d'une équation différentielle quelconque, on constate bien que, dans le cercle où l'on démontre ainsi l'existence de la solution, les approximations successives convergent : c'est une présomption du résultat ci-dessus, mais non une démonstration, car il n'est pas prouvé que cela subsisterait si l'on employait de meilleures majorantes.

le soit. Alors la série

$$\Sigma a_{i_1 i_2 \ldots i_n j} \dot{F}_1^{i_1} \dot{F}_2^{i_2} \ldots \dot{F}_n^{i_n} F^j = \varphi(\dot{F}_1, \dot{F}_2, \ldots, \dot{F}_n, \dot{F})$$

converge encore (*cf.* n° 3), non plus forcément dans tout le domaine (d), mais au moins pour $y - x$ assez petit, c'est-à-dire au voisinage de la droite $y = x$ de ce domaine [1]. L'équation intégrale

$$(a') \qquad F = \varphi(\dot{F}_1, \dot{F}_2, \ldots, \dot{F}_n, \dot{F})$$

a encore pour solution, pour $y - x$ assez petit, la série

$$(b') \qquad F = \psi(\dot{F}_1, \dot{F}_2, \ldots, \dot{F}_n) = \Sigma b_{i_1 i_2 \ldots i_n} \dot{F}_1^{i_1} \ldots \dot{F}_n^{i_n},$$

dont les coefficients sont calculés de façon à satisfaire formellement à (a'). Il suffit pour cela de prouver l'analyticité de

$$\sum \frac{b_{i_1 i_2 \ldots i_n}}{(i_1 + i_2 + \ldots + i_n)!} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n}.$$

Or, si l'on résout le problème des fonctions implicites pour l'équation

$$z = \sum \frac{|a_{i_1 i_2 \ldots i_n}|}{(i_1 + i_2 + \ldots + i_n + j)!} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n} z^j,$$

on trouve une série

$$\Sigma \beta_{i_1 i_2 \ldots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n},$$

analytique et à coefficients positifs. Il suffit de prouver que

$$\beta_{i_1 i_2 \ldots i_n} \geqq \frac{|b_{i_1 i_2 \ldots i_n}|}{(i_1 + i_2 + \ldots + i_n)!}.$$

Mais les formules de récurrence permettant le calcul des $\beta_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ et des $b_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ peuvent s'écrire

$$\beta_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum \left[\frac{|a_{r_1 r_2 \ldots r_n j}|}{(r_1 + r_2 + \ldots + r_n + j)!} \prod_j \beta_{s_1 s_2 \ldots s_n} \right]$$

et

$$b_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum \left(a_{r_1 r_2 \ldots r_n j} \prod_j b_{s_1 s_2 \ldots s_n} \right),$$

---

[1] On converge dans tout le domaine (d) si les $F_1, F_2, \ldots, F_n, F$ sont assez petits.

le symbole $\prod_j b_{s_1, s_2 \ldots s_n}$ désignant le produit de j quantités analogues à $b_{s_1, s_2 \ldots s_n}$ telles que

$$\sum_j s_1 + r_1 = i_1, \qquad \ldots \qquad \sum_j s_n + r_n = i_n;$$

la somme Σ étant étendue à toutes les valeurs possibles des symboles $s_1, s_2, \ldots, s_n, r_1, r_2, \ldots, r_n, j$. Il suffit de vérifier que

$$(r_1 + r_2 + \ldots + r_n + j)! \prod_j (s_1 + s_2 + \ldots + s_n)! \leqq (i_1 + i_2 + \ldots + i_n)!$$

ou que

$$(A + j)!\, A_1!\, A_2! \ldots A_j! \leqq (A + A_1 + A_2 + \ldots + A_j)!,$$

$A, A_1, A_2, \ldots, A_j$ étant des entiers et les j derniers étant différents de zéro. C'est une inégalité évidente si $A_1 = A_2 = \ldots = A_j = 1$ et qui ne sera que renforcée si l'on augmente un des A_j d'une unité.

7. La nouvelle généralisation que nous allons exposer montrera que, dans la théorie précédente, c'est la composition et non la permutabilité qui joue le rôle important. La permutabilité n'apporte qu'une simplification qu'on peut dire accessoire; aussi aurons-nous, quand nous en aurons fait l'étude, à montrer en d'autres points son importance. Pour justifier cette remarque je vais montrer que les résultats précédents s'étendent aux fonctions non permutables [1].

8. Soient $F_1(x, y), F_2(x, y), \ldots, F_n(x, y)$ des fonctions finies et continues comme précédemment dans le domaine (d), mais pouvant n'être pas permutables. Des expressions telles que

$$\dot{F}_1 \dot{F}_2 \ldots \dot{F}_n(x, y), \qquad \dot{F}_1 \dot{F}_2^2 \dot{F}_3(x, y)$$

auront un sens aussi clair (grâce à l'associativité) que quand les fonctions sont permutables. Seulement il ne sera plus permis de

---

[1] J'ai donné cette démonstration dans une Note : *Sulli equazioni integrali* (*Rend. R. Acc. dei Lincei*, 19 janvier 1913).

changer l'ordre des lettres : on n'aura plus, par exemple,

$$\dot{F}_1 \dot{F}_2^2 \dot{F}_1 = \dot{F}_1^2 \dot{F}_2^2.$$

Un polynome procédant suivant les produits symboliques des fonctions précédentes et ayant des coefficients numériques

$$aF_1 + bF_2 + c\dot{F}_1\dot{F}_2 + d\dot{F}_2\dot{F}_1$$

définira encore une fonction finie et continue comme F_1, F_2, ... Il en sera de même, sous une condition que nous allons exprimer, d'une série sans terme constant des produits et puissances symboliques des fonctions précédentes; soit

$$(3) \quad \varphi[\dot{F}_1, \dot{F}_2, \ldots, \dot{F}_n] = aF_1 + bF_2 + \ldots + c\dot{F}_1^2 + d\dot{F}_1\dot{F}_2 + e\dot{F}_2\dot{F}_1 + \ldots$$

une telle série; nous la dirons *régulière* si la série

$$(3') \quad \varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \alpha z_1 + \beta z_2 + \ldots + \gamma z_1^2 + (\delta + \varepsilon) z_1 z_2 + \ldots,$$

déduite de la série (3) en y remplaçant les coefficients a, b, ... par leurs modules α, β, ..., puis les fonctions F_1, F_2, ..., F_n par des nombres complexes ordinaires z_1, z_2, ..., z_n et enfin en groupant les termes semblables, est convergente.

Ceci posé :

α_1. *Toute série de type* (3) *régulière définit dans* (d) *une fonction de x et de y finie et continue comme les fonctions dont on part.*

La démonstration est la même qu'au n° 5.

β_1. *Les calculs sur les séries de type* (3) (*additions et compositions*) *peuvent se faire comme les mêmes calculs* (*additions et multiplications*) *sur les séries entières*, à condition de ne pas perdre de vue la non-permutabilité des fonctions F_1, F_2, ..., F_n.

9. Considérons enfin une équation intégrale

$$(a_1) \qquad F = \varphi[\dot{F}_1, \dot{F}_2, \ldots, \dot{F}_n, \dot{F}]$$

par rapport à l'inconnue $F(x, y)$. Le second membre $\varphi\left[\dot{F}_1, \ldots, \dot{F}\right]$

étant une série de type (3) régulière, n'ayant ni terme constant, *ni terme en* F.

On peut essayer de la résoudre formellement par un développement

$$(b_1) \qquad F = \psi[\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \ldots, \overset{*}{F}_n],$$

ψ étant une série de type (3) sans terme constant. On constate aisément, comme dans le cas où les fonctions F_i sont permutables, que les coefficients de ψ sont déterminés d'une façon unique et s'obtiennent à partir des coefficients de φ par des additions et des multiplications.

Le développement (b_1) ainsi obtenu fournira dans (d) la solution de l'équation (a_1) s'il est régulier. Mais il l'est effectivement : remplaçons en effet l'équation (a_1) par l'équation du même type

$$F = \varphi_1[F_1, F_2, \ldots, F_n, F],$$

φ_1 étant la série déduite de φ en y remplaçant les coefficients par leurs modules. Elle admet, d'après ce qui précède, une solution formelle

$$(b'_1) \qquad F = \chi[\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \ldots, \overset{*}{F}_n],$$

les coefficients de χ étant, d'après une remarque précédente, positifs et supérieurs aux modules des coefficients correspondants de ψ : la régularité de ψ sera donc entraînée par celle de χ.

Mais χ ayant ses coefficients *positifs*, il suffit de prouver la convergence, autour de l'origine, de la série

$$\chi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

obtenue en y remplaçant $F_1, F_2, \ldots, F_n$ par des variables permutables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ et en groupant les termes semblables. C'est immédiat, car en faisant la même substitution dans l'équation (a'_1) on obtient l'équation implicite ordinaire

$$z = \varphi_1(z_1, z_2, \ldots, z_n, z)$$

qui ne cesse pas d'être satisfaite par le développement $\chi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

Ce développement est donc convergent d'après le théorème ordinaire sur les fonctions implicites. Je renvoie à ma Note déjà citée pour la démonstration de l'unicité de la solution.

Sans qu'il soit besoin d'insister, il est clair qu'on pourrait étendre aux fonctions non permutables les considérations du n° **6**.

III. — Quelques résultats sur l'équation de Volterra de première espèce.

10. Nous avons, dans le numéro précédent, traité des équations très générales, mais qui ne sont pas, à beaucoup près, les plus générales qu'on puisse former à partir d'une fonction inconnue par des compositions. La plus simple des équations résolues par les considérations précédentes est celle de Volterra de deuxième espèce

$$F(x, y) + \int_x^y F_1(x, \xi) F(\xi, y) d\xi = \Phi(x, y),$$

dont la théorie est d'ailleurs classique.

L'équation de Volterra de première espèce, que nous écrirons

$$(1) \qquad \int_x^y \varphi(x, \xi) f(\xi, y) d\xi = F(x, y),$$

[$f(x,y)$ et $F(x,y)$ étant des fonctions connues, $\varphi(x,y)$ une inconnue] ne rentre pas, au contraire, dans le type précédent. Nous allons rappeler brièvement les résultats classiques relatifs à cette équation, puis démontrer à son sujet quelques nouveaux résultats dont nous nous servirons par la suite.

Remarquons d'abord que, dans la théorie qu'on fait d'ordinaire de cette équation (1), on considère la limite inférieure d'intégration x comme fixe, y étant seule variable. Nous aurons avantage, pour notre théorie, à considérer à la fois x et y comme variables.

11. Soit donc l'équation

$$(1) \qquad \int_x^y \varphi(x, \xi) f(\xi, y) d\xi = F(x, y),$$

$f(x, y)$ et $F(x, y)$ étant finies et continues dans le domaine (d)

$$a \leqq x \leqq y \leqq b.$$

Recherchons les solutions $\varphi(x, y)$ finies et continues dans le même domaine.

Il est un cas où cette recherche n'offre aucune difficulté, car l'équation (1) se ramène à une équation de deuxième espèce : c'est celui où la fonction $f(x, y)$ (noyau) est, suivant une dénomination de M. Volterra, d'un *ordre déterminé dans le domaine* (d), c'est-à-dire où les premières dérivées du noyau qui ne sont pas identiquement nulles pour $x = y$ sont constamment différentes de zéro pour $x = y$.

Pour plus de précision, imaginons que les dérivées

$$\left[\frac{\partial^p f(x, y)}{\partial x^s \partial y^{p-s}}\right]_{y=x}$$

soient nulles pour $p < n - 1$; on a alors

$$\left[\frac{\partial^{n-1} f(x, y)}{\partial y^{n-1}}\right]_{y=x} = -\left[\frac{\partial^{n-1} f(x, y)}{\partial y^{n-2} \partial x}\right]_{y=x} = \ldots = (-1)^{n-1}\left[\frac{\partial^{n-1} f(x, y)}{\partial y^{n-1}}\right]_{y=x}.$$

Si la valeur de ces rapports est une fonction $\alpha(x)$ continue et *différente de zéro* pour $a \leqq x \leqq b$, nous dirons $f(x, y)$ d'ordre n dans le domaine (d) [1].

Ceci posé, on peut prouver que :

Si la fonction $f(x, y)$ est d'ordre n et admet, ainsi que $F(x, y)$, des dérivées partielles d'ordre n; si, de plus (condition nécessaire),

---

[1] On voit que, lorsque y tend vers x, la fonction d'ordre $n + 1$ sera infiniment petite comme $(y - x)^n$, la partie principale de cet infiniment petit étant justement $\frac{(y - x)^n}{n!}\alpha(x)$.

Voici deux remarques qu'il est bon d'avoir à l'esprit en lisant ce travail :

1° Quand on compose deux fonctions d'ordre déterminé, leurs ordres s'ajoutent;

2° Dans les mêmes conditions, les coefficients $\alpha(x)$ se multiplient.

Si l'on avait pris pour noter l'ordre de la fonction précédemment envisagée n et non $n + 1$, ce qui pouvait paraître plus naturel, l'énoncé précédent 1° perdrait de sa simplicité.

toutes les dérivées de la fonction F *jusqu'à l'ordre* $(n-1)$ *inclus sont identiquement nulles pour* $y = x$, *l'équation* (1) *est équivalente à une équation de Volterra de deuxième espèce ayant, d'après ce qui précède, une seule solution finie et continue dans le domaine* (d).

En effet, en dérivant (1) n fois par rapport à y, on obtient l'équation

$$\varphi(x, y)\,\alpha(y) + \int_x^y \varphi(x, \xi)\,\frac{\partial^n f(\xi, y)}{\partial y^n}\,d\xi = \frac{\partial^n F(x, y)}{\partial y^n}$$

complètement équivalente à (1), grâce aux conditions que remplit $F(x, y)$.

D'où

$$(2)\qquad \varphi(x, y) + \int_x^y \varphi(x, \xi)\,\frac{\dfrac{\partial^n f(\xi, y)}{\partial y^n}}{\alpha(y)}\,d\xi = \frac{\dfrac{\partial^n F(x, y)}{\partial y^n}}{\alpha(y)};$$

c'est l'équation de deuxième espèce annoncée ayant, grâce à l'hypothèse que $\alpha(y)$ ne s'annule pas, un noyau et un second membre finis dans (d) [1]. Remarquons enfin que si le noyau $f(x, y)$ et le second membre $F(x, y)$ sont permutables, la solution $\varphi(x, y)$ est permutable avec l'un et avec l'autre. Je renvoie pour ce dernier point aux *Fonctions de lignes* de M. Volterra, p. 165.

Si au contraire

$$\alpha(x) = \left[\frac{\partial^{n-1} f(x, y)}{\partial y^{n-1}}\right]_{y=x}$$

s'annule en un point x_0 $(a \leq x_0 \leq b)$, et si l'on mène par le point $y = x = x_0$ les parallèles aux axes EX_0 et GX_0 (*fig.* 2), la méthode précédente s'appliquera seulement à l'intérieur des deux triangles AX_0G et X_0BE

---

[1] La solution de cette équation s'écrira, d'après les résultats précédents, en posant

$$-K(x, y) = \frac{\dfrac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^n}}{\alpha(y)}, \qquad L(x, y) = \frac{\dfrac{\partial^n F(x, y)}{\partial y^n}}{\alpha(y)},$$

sous forme de la série

$$L(x, y) + \overset{1}{L}\overset{1}{K}(x, y) + \overset{1}{L}\overset{1}{K}{}^2(x, y) + \ldots + \overset{1}{L}\overset{1}{K}{}^n(x, y) + \ldots.$$

et y donnera $\varphi(x, y)$ finie et continue. Nous allons nous préoccuper d'étudier $\varphi(x, y)$ au voisinage du point X_0.

C'est un problème tout différent de celui qui fut traité par M. Vol-

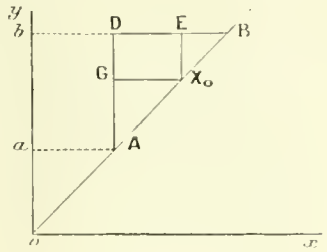


Fig. 2.

terra, puis par M. Lalesco (Thèse) : faisant dans l'équation $x = x_0$, ils recherchaient les solutions $\varphi(x_0, y)$ finies et continues sur la droite X_0E de la figure. La méthode si originale de M. Lalesco ne s'applique pas au problème que nous avons en vue.

Je me limiterai dans l'étude suivante aux fonctions analytiques et aux variables complexes.

12. J'aurai souvent, par la suite, à envisager des fonctions analytiques de deux variables complexes x et y. Je représenterai toujours

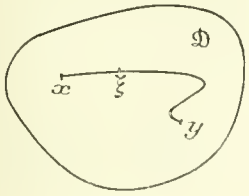


Fig. 3.

ces variables par deux points marqués sur un même plan complexe (qui pourra être dans certains cas une surface de Riemann).

Soient deux fonctions $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ holomorphes quand x et y sont tout deux intérieurs à un même domaine simplement connexe $\mathfrak{D}$ du plan complexe (*fig.* 3) ou d'une surface de Riemann; leur com-

position

$$\int_x^y F_1(x, \xi) F_2(\xi, y) d\xi$$

a un sens parfaitement clair (l'intégrale est calculée sur une courbe, d'ailleurs quelconque, allant de x en y sans quitter $\mathfrak{D}$) et conduit à une fonction $\overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2(x, y)$, analytique elle aussi quand x et y sont situés dans $\mathfrak{D}$. La définition de la permutabilité et tous les résultats précédents s'étendent de même aux variables complexes.

Si nous considérons par exemple l'équation

$$(1) \qquad \int_x^y \varphi(x, \xi) f(\xi, y) d\xi = F(x, y),$$

f et F étant des fonctions holomorphes quand x et y sont intérieurs à $\mathfrak{D}$; si la fonction f est d'ordre n dans $\mathfrak{D}$, c'est-à-dire si l'on a

$$\left[\frac{\partial^p f(x, y)}{\partial x^\beta \partial y^{p-s}}\right]_{y=x} = 0 \quad (p < n-1) \qquad \text{et} \qquad \left[\frac{\partial^{n-1} f(x, y)}{\partial y^{n-1}}\right]_{y=x} = \alpha(x),$$

$\alpha(x)$ n'étant jamais nulle quand x est dans $\mathfrak{D}$; si enfin toutes les dérivées de la fonction $F(x, y)$ jusqu'à l'ordre $(n-1)$ inclus sont identiquement nulles pour $x = y$:

L'équation (1), *équivalente à l'équation*

$$(2) \qquad \varphi(x, y)\alpha(y) + \int_x^y \varphi(x, \xi) \frac{\partial^n f(\xi, y)}{\partial y^n} d\xi = \frac{\partial^n F(x, y)}{\partial y^n},$$

admettra une solution unique, fonction holomorphe de x et y, lorsque ces variables sont contenues dans $\mathfrak{D}$.

13. Étudions enfin, comme nous l'avons annoncé, le cas où $\alpha(y)$ s'annule en certains points (forcément isolés) du domaine $\mathfrak{D}$ et où par conséquent le noyau n'est d'aucun ordre déterminé dans $\mathfrak{D}$. Soient a, b, c, ... ces différents points.

Soit un chemin allant d'un point x à un point y du domaine $\mathfrak{D}$ sans rencontrer aucun des points a, b, c, ... (*fig.* 4); d'après le résultat

précédent, l'équation (1) admet une seule solution holomorphe dans le domaine $\mathfrak{D}'$ constitué par une *bande* entourant ce chemin. La solution $\varphi(x,y)$ de l'équation (1) est donc holomorphe toutes les fois que x et y sont tous deux différents des a, b, c, ...; c'est de plus une fonction non seulement des points x et y, mais encore du chemin d'intégration [figurant dans l'équation (1) ou dans l'équation (2)] allant de x à y; cette fonction prend pourtant la même valeur pour deux

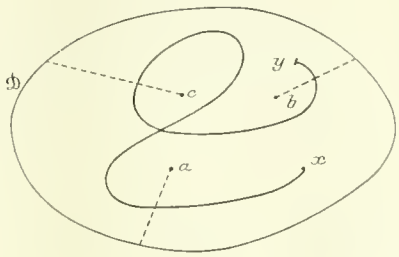


Fig. 4.

chemins qui peuvent se déduire l'un de l'autre par déformation san rencontrer aucun des points a, b, c, ...

Ainsi la fonction $\varphi(x,y)$ ne dépend du chemin adopté pour aller de x en y que par le nombre des tours que ce chemin effectue autour de a, b, c et par l'ordre dans lequel il effectue ces tours.

On pourra construire aisément, en considérant une infinité de domaines $\mathfrak{D}$ munis de coupures (lignes pointillées de la figure 4) et en réunissant les bords de ces coupures de façon convenable, une surface de Riemann simplement connexe Δ telle que $\varphi(x,y)$ soit une fonction univoque des deux points x et y de cette surface de Riemann [1]. Cette surface de Riemann aura trois infinités de points de ramification d'ordre infini respectivement projetés en a, b, c.

Notre solution $\varphi(x,y)$ sera holomorphe toutes les fois que ni x ni y

---

[1] Le chemin d'intégration sur lequel il faut opérer pour obtenir $\varphi(x,y)$ étant précisément un chemin, d'ailleurs quelconque, allant de x en y *sur la surface de Riemann* Δ.

On pourra se borner, pour obtenir toutes les valeurs de $\varphi(x,y)$, à faire varier x sur un feuillet de cette surface Δ. Ceci implique des relations très simples auxquelles satisfait $\varphi(x,y)$.

ne coïncideront avec un de ces points de ramification. Ces points de ramification seront en général de véritables points critiques, comme il est facile de s'en assurer sur un exemple.

Soit l'équation

$$(1') \quad \int_x^y \varphi(x, \xi)[(1-b\lambda)\xi + b\lambda y]\, d\xi = (1-b)\frac{y^2-x^2}{2} + by(y-x),$$

λ et b étant deux paramètres; son noyau $(1-b\lambda)x + b\lambda y$ est du premier ordre, sauf autour de l'origine $x = y = 0$. Elle équivaut à l'équation, obtenue en la dérivant par rapport à y,

$$(2') \qquad y\,\varphi(x, y) + \lambda \int_x^y b\,\varphi(x, \xi)\, d\xi = y + b(y-x).$$

On en déduit aisément $\varphi(x, y)$, car, en dérivant une fois de plus, on a une équation différentielle ordinaire.

Il vient

$$\varphi(x, y) = \frac{1+b}{1+\lambda b} + \frac{(\lambda-1)b}{1+\lambda b}\left(\frac{x}{y}\right)^{1+\lambda b}.$$

Ainsi cette fonction admet bien en général, comme point critique par rapport à x et à y, l'origine. Ce ne sera plus le cas pour certaines valeurs de λ, par exemple $\lambda = 1$: on trouve alors

$$\varphi(x, y) = 1,$$

c'est-à-dire une solution holomorphe autour de $x = 0$, $y = 0$.

On ne se serait pas aperçu de cette holomorphie si l'on avait résolu l'équation (2') par la méthode générale indiquée précédemment : on aurait en effet obtenu $\varphi(x, y)$ par une série, celle-là même que l'on obtient en le développant par rapport aux puissances de λ, série n'ayant pas pour termes des fonctions de x et de y holomorphes autour de l'origine.

14. Il peut donc arriver, nous venons d'en donner un exemple, que l'un des points de ramification a, b, c, ... ne soit point singulier qu'en apparence et que l'on puisse, dans la surface de Riemann Δ, supprimer les ramifications autour de ce point. *C'est ce cas que nous*

allons apprendre à caractériser. La méthode de résolution précédemment donnée pour l'équation (1) ne peut nous être d'aucun secours, puisque (et nous en avons vu un exemple) les singularités des différents termes de la série qui définit $\varphi(x, y)$ peuvent n'avoir aucun rapport avec les singularités de $\varphi(x, y)$.

Pour que l'un des points de ramification, a par exemple, disparaisse, *il est* évidemment *nécessaire que la fonction $\varphi(x, y)$ soit holomorphe lorsque x et y sont voisins de a et que l'on va de l'un à l'autre par un chemin restant au voisinage de a.*

Cette condition sera, comme nous le verrons, assez facile à transformer. Prouvons auparavant qu'elle est suffisante. Montrons donc que, *sous cette condition*, la fonction $\varphi(x, y)$, que nous savions déjà holomorphe autour de x_0, y_0 points quelconques de Δ ne coïncidant pas avec un point de ramification, *est aussi holomorphe autour*

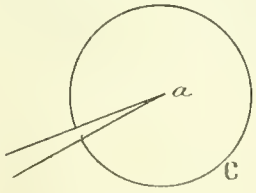


Fig. 4 *bis*.

de x_0, y_0, quand x_0, ou y_0, ou x_0 et y_0 coïncident avec l'un quelconque des points de ramification projetés en a.

Supposons en effet vérifiée la condition précédente; soit C un petit cercle tracé autour du point a sur un des feuillets de la surface de Riemann Δ, on a

$$\varphi(x, y) - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\xi, y)}{\xi - x}\, d\xi = 0 \tag{3}$$

lorsque x est intérieur à ce cercle [1] et que y est assez voisin de a, le chemin utilisé pour aller de x en y restant aussi très voisin de a. Mais l'expression (3) est, au moins quand x diffère de a, fonction analytique de y dans Δ. Elle est donc identiquement nulle sur Δ. Prenons

[1] Nous entendons par intérieur un point projeté à l'intérieur de C, et situé sur le même feuillet de la surface de Riemann Δ.

alors un point y_0 quelconque [1] de Δ et traçons autour de lui un petit cercle Γ; on a

$$\varphi(\xi, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\eta - y}\, d\eta,$$

y étant un point intérieur [2] à T. D'où, grâce à l'égalité (3),

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_C\int_\Gamma \frac{\varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{(\xi - x)(\eta - y)}$$

qui prouve l'holomorphie de $\varphi(x, y)$ autour de $x = a$, $y = y_0$.

En échangeant le rôle de x et de y et en envisageant

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(x, \eta)}{\eta - y}\, d\eta, \tag{4}$$

on prouvera de même l'holomorphie autour de x_0, a.

Reste enfin à prouver la même propriété autour d'un point $x = a$, $y = a$. Pour qu'il y ait lieu à démonstration, il faut que le chemin qui va de x voisin de a à y voisin de a ne reste pas constamment voisin

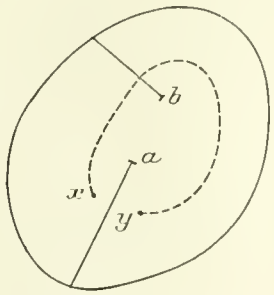


Fig. 4 *ter*.

de a, mais entoure les autres points de ramification; tourne par exemple autour de b. On a toujours l'équation (3), et comme ξ est toujours différent de a, on a aussi

$$\varphi(\xi, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\eta - y}\, d\eta = 0 \quad [3];$$

---

[1] Qui ne soit pas un point a, b, c, ...

[2] Sur le même feuillet de Δ.

[3] C_1 étant un cercle analogue à C, mais tracé sur un feuillet différent.

d'où, comme plus haut,

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_C\int_{C_1}\frac{\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{(\xi - x)(\eta - y)}.$$

La condition nécessaire, précédemment posée, est suffisante. Si cette condition est vérifiée par le point b, on pourrait supprimer aussi les ramifications autour de b, etc. Reste à faire l'étude de cette condition.

15. Soit donc l'équation

$$(1)\qquad \int_x^y \varphi(x, \xi)\, f(\xi, y)\, d\xi = F(x, y).$$

$f(x, y)$ et $F(x, y)$ étant analytiques autour du point a, que nous prendrons comme origine pour simplifier. Il faut chercher quand cette équation admet une solution $\varphi(x, y)$ analytique autour de l'origine (le chemin d'intégration étant, pour fixer les idées, la droite qui joint x à y).

Nous chercherons d'abord, sans nous préoccuper de sa convergence, un développement

$$(5)\qquad \varphi(x, y) = \sum_{0}^{\infty}{}_p \sum_{0}^{\infty}{}_q c_{p,q} x^p y^q$$

vérifiant formellement l'équation (1). Un développement de la forme précédente peut toujours s'écrire, et d'une façon unique,

$$(6)\qquad \varphi(x, y) = \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{(y - x)^n}{n!}\varphi^{(n)}(x) \quad (^1),$$

les $\varphi^{(n)}(x)$ étant des séries des puissances de x définies par les équations symboliques

$$\varphi^{(n)}(x) = \left[\frac{\partial^n \varphi(x, y)}{\partial y^n}\right]_{y=x}.$$

Quand on y remplace $\varphi(x, y)$ par la série (6), le premier membre

(1) Et inversement d'ailleurs. Il y a identité formelle complète entre les développements (5) et (6).

de l'équation (6) devient (comme le second) une série des puissances de x et de y; ces deux séries doivent être identiques : il suffira pour exprimer ce fait d'écrire que leurs dérivées par rapport à y sont toutes nulles pour $y = x$.

En posant

$$f^{(n)}(x) = \left[\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^n}\right]_{y=x}, \qquad F^{(n)}(x) = \left[\frac{\partial^n F(x, y)}{\partial y^n}\right]_{y=x},$$

on peut donc remplacer l'équation (1) par le système [1]

$$(1') \quad \sum_0^p{}_i \sum_0^i{}_s C_i^s \varphi^{(s)}(x) \frac{d^{i-s}}{dx^{i-s}} f^{(p-i)}(x) = F^{(p+1)}(x) \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, \infty);$$

si nous admettons que la première fonction $f^{(n)}(x)$ non nulle soit la fonction $f^{(a)}(x)$ [2], forcément la première fonction $F^{(n)}(x)$ non identiquement nulle correspond à $n \geqq a + 1$ (*cf.* le n° **11**, p. 18). Nous supposerons par exemple qu'elle corresponde à

$$n = a + b + 1,$$

b entier positif ou nul.

Alors les équations (1') donnent

$$\varphi^{(0)}(x) = \varphi^{(1)}(x) = \ldots = \varphi^{(b-1)}(x)$$

et elles déterminent univoquement les $\varphi^{(n)}(x)$ successifs sous la forme

$$(1'') \qquad \varphi^{b+\mu}(x) = \frac{\Phi_{b+\mu}(F, f)}{[f^{(a)}(x)]^{\mu+1}},$$

les $\Phi_{b+\mu}(F, f)$ étant des polynomes, faciles à former, d'un certain nombre des quantités $F^{(n)}$ et $f^{(n)}$ et de leurs dérivées.

Les $\varphi^{(n)}(x)$ sont ainsi déterminés, et ici deux cas se présentent :

1° $f(x, y)$ est, autour de l'origine, d'un ordre déterminé. C'est le

---

[1] Chacune des équations de ce système est obtenue, comme nous l'avons dit, en dérivant $p + 1$ fois l'équation (1) par rapport à y, puis en y faisant $y = x$. Les C_i^s sont les coefficients du binome.

[2] Nous l'avons nommée précédemment $f^{(n-1)}(x)$ ou $\alpha(x)$.

cas où la série des puissances de x qui exprime

$$f^{(a)}(x)$$

commence par un terme constant; l'ordre de $f(x, y)$ est forcément $a+1$. Les $\varphi^{(b+\mu)}(x)$ obtenus précédemment sont des séries entières en x. Il y a donc une série et une seule

$$\Sigma (y-x)^n \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} = \Sigma\Sigma c_{pq} x^p y^q$$

vérifiant l'équation (1). Cette série converge autour de l'origine et représente la solution holomorphe de l'équation (1), solution que nous avons déjà montrée exister et être unique.

2° $f(x, y)$ n'est pas, autour de l'origine, d'un ordre déterminé. C'est le cas que nous sommes en train d'étudier. $f^{(a)}(x)$ n'a pas alors de terme constant et les $\varphi^{(b+\mu)}(x)$ donnés par les formules précédentes ne sont pas des séries entières de (x), mais ont en général un certain nombre de termes de degré négatif en x. *Il n'y a pas, en général*, de développement du type cherché

$$\Sigma (y-x)^n \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} = \Sigma\Sigma c_{pq} x^p y^q \tag{7}$$

vérifiant formellement l'équation (1). Il n'y a pas, *a fortiori*, de solution holomorphe de l'équation (1).

Les cas particuliers où il existe, autour de $x=0$, $y=0$, une solution holomorphe de l'équation (1), devront d'abord être tels qu'il existe un développement de type (7) vérifiant formellement l'équation (1). C'est facile à reconnaître, au moins théoriquement : il suffit de vérifier que, dans les formules (1″) donnant les $\varphi^{(n)}(x)$, se produisent des réductions telles que les termes de degré négatif en x disparaissent.

Nous allons compléter ce résultat par le suivant, qui permet de répondre entièrement au problème posé au début de ce numéro :

S'il existe un développement tel que (7) *vérifiant formellement l'équation* (1), *ce développement converge et représente une fonction de x et de y solution de l'équation* (1).

Soit en effet

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{n} (y-x)^n \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} \tag{7}$$

ce développement. Les $\varphi^{(n)}(x)$ sont, d'après les formules (1''), des fonctions de x holomorphes dans un certain cercle C de rayon R tracé autour de l'origine (*fig.* 5). De plus, l'origine étant un zéro

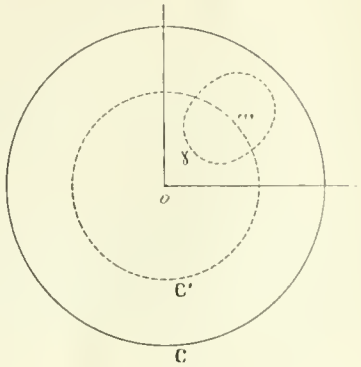


Fig. 5.

isolé de $f^{(n)}(x)$, dans le voisinage d'un point quelconque ω d'une circonférence C' d'un rayon $R' < R$, on se trouve dans le cas 1° : la série (7) converge et représente une fonction analytique $\varphi(x, y)$ quand x et y sont contenus dans un petit cercle γ de rayon r et de centre ω. Si M est le maximum fini de $|\varphi(x, y)|$ dans tous ces petits cercles, la série

$$\Sigma (y-\omega)^n \frac{\varphi^{(n)}(\omega)}{n!}$$

est majorée par

$$\frac{M}{1-\dfrac{y-\omega}{r}},$$

c'est-à-dire que

$$\left|\frac{\varphi^{(n)}(\omega)}{n!}\right| < \frac{M}{r^n}$$

pour tout cercle γ.

Sur la circonférence C' on a donc

$$\left|\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}\right| < \frac{M}{r^n},$$

et, dans C′, la fonction analytique $\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}$ est donc majorée par

$$\frac{M}{r^n}\frac{1}{1-\frac{x}{R'}}$$

et la série double

$$\sum (y-x)^n \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} = \sum\sum c_{pq} x^p y^q$$

est majorée par la série

$$\sum \frac{(y+x)^n M}{r^n\left(1-\frac{x}{R'}\right)} = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{R'}\right)\left(1-\frac{x+y}{r}\right)},$$

qui est bien convergente si x et y sont assez petits.

Ainsi, pour reconnaître si l'équation (1) admet dans le domaine $x=0$, $y=0$, une solution analytique, il suffira de vérifier, comme nous l'avons dit, qu'elle est satisfaite par une série de forme (7). Cette vérification nécessite en général, il fallait bien s'y attendre, une infinité dénombrable de calculs. Nous trouverons, ce sera justement une application de la théorie des fonctions permutables, des cas dans lesquels on pourra affirmer *a priori* l'existence de telles solutions [1].

16. L'étude des fonctions permutables nous conduira à envisager une équation, elle aussi formée à partir de la fonction inconnue et des fonctions connues par des additions et des compositions, et qui pourtant n'est pas du type simple traité aux paragraphes I et II.

Le problème fondamental de cette théorie est en effet le suivant : *Trouver les fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec une fonction donnée $f(x, y)$.* Il conduit à résoudre l'équation

$$(\Lambda) \qquad \int_x^y f(x,\xi)\,\varphi(\xi,y)\,d\xi = \int_x^y \varphi(x,\xi)\,f(\xi,y)\,d\xi,$$

par rapport à l'inconnue $\varphi(x, y)$. Il faudra ensuite étudier les propriétés des solutions $\varphi(x, y)$.

---

[1] *Cf.* Chapitre IV, n° **10**, p. 81.

L'équation (1) du paragraphe III est plus simple que l'équation (A); sa théorie était nécessaire pour faire celle de l'équation (A). Mais nous verrons inversement que de la théorie de l'équation (A) on peut tirer des conséquences intéressantes relatives à certaines équations (1) (*cf.* fin du n° **15**). Enfin entre les équations (1) et (A) nous verrons se développer certaines différences qui, convenablement interprétées, conduisent à classer [1] les équations qui, dans cette théorie, jouent le rôle des équations algébriques, c'est-à-dire les équations formées à partir de la fonction inconnue et des fonctions connues par additions et compositions.

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS PERMUTABLES AVEC UNE FONCTION D'ORDRE DONNÉ : LEUR RECHERCHE PAR LA MÉTHODE DE M. VOLTERRA.

I. — Les fonctions permutables avec une fonction du premier ordre.

1. Le problème fondamental de la théorie des fonctions permutables est celui que nous avons déjà posé au Chapitre précédent (n° **16**) :

Trouver toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ *permutables avec une fonction donnée* $f(x, y)$.

Ce problème a été résolu par M. Volterra quand la fonction donnée est d'ordre 1 [2] et d'ordre 2 [3]. Notre but, dans ce Chapitre, sera d'étendre sa méthode a une fonction donnée d'ordre n. Mais, auparavant, nous exposerons la démonstration donnée par M. Volterra pour $n = 1$.

2. Soit donc $f(x, y)$ une fonction finie et continue [4] dans un

---

(1) *Cf.* Chapitre IV, Conclusion.

(2) *Sopra le funzioni permutabili* (*Rend. dei Lincei*, 17 avril 1910).

(3) *Contributo allo studio delle funzioni permutabili* (*Rend. dei Lincei*, 1er semestre 1911, p. 296).

(4) Nous aurons à faire plus tard quelques hypothèses sur ses dérivées.

domaine du plan des (x, y)

$$0 \leqq x \leqq y \leqq a,$$

et du premier ordre, c'est-à-dire telle que

$$f(x, x) \lessgtr 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqq x \leqq a.$$

Recherchons les fonctions permutables avec elle, finies et continues dans le même domaine.

Le problème posé revient à la résolution de l'équation

$$(\mathrm{A}) \qquad \int_x^y f(x, \xi)\, \varphi(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y \varphi(x, \xi) f(\xi, y)\, d\xi.$$

5. M. Volterra simplifie sa résolution par deux transformations, qui ne sont d'ailleurs pas essentielles, et qui permettent de ramener le problème au cas où

$$f(x, x) = 1,$$

$$\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right]_{x=y} = -\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right]_{x=y} = 0.$$

Faisons le changement de variable

$$(2) \qquad x = g(x_1), \qquad y = g(y_1), \qquad \xi = g(\xi_1),$$

la dérivée $g'(x_1)$ étant toujours positive, de sorte que ces relations soient inversables. L'équation (A) devient

$$(\mathrm{A}') \quad \int_{x_1}^{y_1} f(x_1, \xi_1)\, \varphi(\xi_1, y_1)\, g'(\xi_1)\, d\xi_1 = \int_{x_1}^{y_1} \varphi(x_1, \xi_1) f(\xi_1, y_1)\, g'(\xi_1)\, d\xi_1,$$

en désignant par la notation $f(x_1, \xi_1)$ ce que devient $f(x, y)$ quand on y fait le changement de variables (2). En posant

$$f_1(x_1, \xi_1) = \pm f(x_1, \xi_1) \sqrt{g'(x_1)\, g'(\xi_1)},$$
$$\varphi_1(x_1, \xi_1) = \pm \varphi(x_1, \xi_1) \sqrt{g'(x_1)\, g'(\xi_1)},$$

l'équation (A′) devient

$$(\mathrm{A}'') \qquad \int_{x_1}^{y_1} f_1(x_1, \xi_1)\, \varphi_1(\xi_1, y_1)\, d\xi_1 = \int_{x_1}^{y_1} \varphi_1(x_1, \xi_1) f_1(\xi_1, y_1)\, d\xi_1.$$

Le problème posé est ainsi ramené à la détermination des fonctions permutables avec $f_1(x_1, y_1)$. Mais on peut réaliser

$$f_1(x_1, x_1) = 1;$$

il suffit de prendre

$$1 = \pm f(x, x)\, g'(x_1),$$

c'est-à-dire

$$x_1 = \pm \int f(x, x)\, dx,$$

relation qui est bien inversable d'après l'hypothèse précédente : la fonction $f(x, y)$ est du premier ordre.

La transformation

$$f_2(x_1, y_1) = f_1(x_1, y_1)\frac{\alpha(x_1)}{\alpha(y_1)},$$

$$\varphi_2(x_1, y_1) = \varphi_1(x_1, y_1)\frac{\alpha(x_1)}{\alpha(y_1)},$$

la fonction $\alpha(x_1)$ étant toujours différente de zéro, laisse aussi invariante l'équation (A″). Tout revient finalement à trouver les fonctions permutables avec $f_2(x_1, y_1)$; or on a

$$f_2(x_1, x_1) = 1,$$

et l'on peut disposer de l'arbitraire $\alpha(x_1)$ de façon que

$$\left[\frac{\partial f_2(x_1, y_1)}{\partial x_1}\right]_{y_1 = x_1} = -\left[\frac{\partial f_2(x_1, y_1)}{\partial y_1}\right]_{y_1 = x_1} = 0.$$

Il suffit de prendre

$$\alpha(x_1) = e^{-\int \left[\frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial y_1}\right]_{y_1 = x_1} dx_1}.$$

4. Plaçons-nous donc dans le cas où la fonction $f(x, y)$ vérifie les conditions

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(x, x) = 1, \\ \left[\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right]_{y = x} = -\left[\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right]_{y = x} = 0. \end{array} \right.$$

Nous supposerons de plus que $f(x, y)$ admette des dérivées finies

et continues jusqu'à l'ordre 3 inclus [1]. L'artifice de M. Volterra consiste alors à remplacer l'inconnue $\varphi(x, y)$ par une inconnue auxiliaire $\Phi(x, y)$ telle que

$$(\mathrm{A}) \qquad \Phi(x, y) = \int_x^y f(x, \xi)\,\varphi(\xi, y)\,d\xi = \int_x^y \varphi(x, \xi)\,f(\xi, y)\,d\xi.$$

Pour éliminer φ entre les deux relations ainsi obtenues il suffit de résoudre, comme nous l'avons appris au Chapitre I, deux équations de Volterra de première espèce; il vient

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = -\varphi(x, y) + \displaystyle\int_x^y \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial x}\,\varphi(\xi, y)\,d\xi, \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \quad \varphi(x, y) + \displaystyle\int_x^y \varphi(x, \xi)\,\frac{\partial f(\xi, y)}{\partial y}\,d\xi; \end{cases}$$

d'où, en posant

$$f_1(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \qquad f_2(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y},$$

et

$$\mathrm{F}_1(x, y) = f_1(x, y) + \overset{*}{f}{}_1^2(x, y) + \ldots + \overset{*}{f}{}_1^n(x, y) + \ldots,$$

$$\mathrm{F}_2(x, y) = f_2(x, y) - \overset{*}{f}{}_2^2(x, y) + \ldots + (-1)^{n-1}\overset{*}{f}{}_2^n(x, y) + \ldots,$$

$$(4) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y) = -\dfrac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} - \displaystyle\int_x^y \mathrm{F}_1(x, \xi)\,\frac{\partial \Phi(\xi, y)}{\partial \xi}\,d\xi, \\[2ex] \varphi(x, y) = \quad \dfrac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} - \displaystyle\int_x^y \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial \xi}\,\mathrm{F}_2(\xi, y)\,d\xi. \end{cases}$$

Le résultat de l'élimination est donc

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \int_x^y \left[\mathrm{F}_1(x, \xi)\,\frac{\partial \Phi(\xi, y)}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial \xi}\,\mathrm{F}_2(\xi, y)\right] d\xi = 0$$

---

[1] Cette hypothèse, qui est aussi indispensable que celle de l'existence des premières dérivées du noyau dans la théorie de l'équation de Volterra de première espèce, se conserve à travers les changements de variables du numéro précédent.

ou, en intégrant par parties et posant

$$g_{12}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x,y), \qquad g_{21}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y),$$

$$(A') \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \int_x^y [\Phi(x,\xi)\, g_{12}(\xi,y) - g_{21}(x,\xi)\, \Phi(\xi,y)]\, d\xi = 0,$$

car la seconde des relations (1) entraîne

$$F_1(x,x) = F_2(x,x) = 0.$$

On a de plus $\Phi(x, x) = 0$, et il est bien aisé de voir qu'inversement, toute solution de l'équation (A'), vérifiant cette condition, donnera, par l'une quelconque des formules (4), une des fonctions $\varphi(x, y)$ cherchées.

5. Reste donc à résoudre l'équation (A') sous la condition $\Phi(x, x) = 0$; c'est une équation intégro-différentielle facile à réduire à une équation intégrale. Soit en effet l'équation

$$(e) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \lambda(x,y) = 0;$$

en y posant $u = \frac{y-x}{2}$, $v = \frac{y+x}{2}$, elle devient

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} + \lambda(x,y) = 0,$$

et elle admet, si $\lambda(x, y)$ a des dérivées premières [1], la solution

$$(e') \qquad \psi(x,y) = \theta(u) - \int_u^v \lambda(\zeta - u, \zeta + u)\, d\zeta,$$

$\theta(u)$ étant une fonction arbitraire ayant une dérivée première.

En nommant un instant $\lambda(x, y)$ l'intégrale qui figure dans l'équa-

---

[1] Cette existence des dérivées premières est nécessaire pour que $\psi(x, y)$, donnée par la formule (e'), ait des dérivées premières.

tion (A′) [1], il est alors immédiat que nous pouvons remplacer cette équation (A′) par

$$(\mathrm{B})\qquad \Phi(x,y)=\theta(u)-\int_u^v d\zeta\int_{\zeta-u}^{\zeta+u} d\xi\,[\Phi(\zeta-u,\xi)\,g_{12}(\xi,\zeta+u) - g_{21}(\zeta-u,\xi)\;\Phi(\xi,\zeta+u)],$$

dont il faut trouver la solution ayant des dérivées premières, $\theta(u)$ étant une fonction arbitraire finie, continue et dérivable dans l'intervalle $0\leqq u\leqq\frac{a}{2}$ [pour $u=v$, c'est-à-dire pour $x=0$, on doit avoir en effet $\Phi(x,y)=\theta\left(\frac{y}{2}\right)$] et telle que $\theta(0)=0$ [ceci pour que $\Phi(x,x)$ soit nul].

M. Volterra résout cette équation par approximations successives. Elle admet une solution et une seule [2] donnée par la formule

$$(5)\qquad \Phi(x,y)=\sum_0 {}_n\,\Phi_n(x,y)$$

avec

$$\Phi_0(x,y)=\theta(u),$$

$$(6)\qquad \Phi_n(x,y)=-\int_u^v d\zeta\int_{\zeta-u}^{\zeta+u} d\xi\,[\;\Phi_{n-1}(\zeta-u,\xi)\;\;g_{12}(\xi,\zeta+u) - g_{21}(\zeta-u,\xi)\,\Phi_{n-1}(\xi,\zeta+u)]\,.$$

Il est essentiel de vérifier que les approximations successives sont bien définies dans le domaine

$$0\leqq x\leqq y\leqq a,$$

dans lequel nous nous sommes placés. Il suffit de vérifier que

$$0\leqq\zeta-u\leqq\zeta+u\leqq a,$$

mais c'est évident, car

$$\zeta+u-(\zeta-u)=y-x\geqq 0$$

et

$$0\leqq\zeta-u\leqq x,\qquad y-x\leqq\zeta+u\leqq y.$$

---

(1) Cette fonction $\lambda(x,y)$ a bien des dérivées premières, puisque $\Phi(x,y)$ en a, et aussi g_{12} et g_{21}, d'après l'existence des dérivées troisièmes de $f(x,y)$.

(2) L'unicité se démontre comme pour l'équation de Volterra de deuxième espèce.

La convergence de la série (5), et par conséquent l'existence de la série Φ, est alors immédiate : soient N une borne supérieure des modules de g_{12} et de g_{21} dans le domaine, et M une borne supérieure du module de $\Phi_0(x, y)$, on constate que

$$|\Phi_n(x, y)| < 2^n \mathrm{MN}^n a^n \frac{|y-x|^n}{n!}.$$

Il faut encore vérifier, et c'est essentiel, l'existence des dérivées premières de $\Phi(x, y)$. Prenons, pour le faire, comme variables u et v. Les différents termes de la série (5) qui définit $\Phi(x, y)$ sont dérivables puisque θ, g_{12}, g_{21} le sont. Comme on a

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial v} = -\int_{v-u}^{v+u} [\Phi_{n-1}(v-u, \xi)\, g_{12}(\xi, v+u) - \ldots]\, d\xi,$$

la convergence de la série

$$\sum \frac{\partial \Phi_n}{\partial v},$$

et par conséquent l'existence de $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$, résulte la convergence de la série (5).

Posons $\frac{\partial \Phi_n}{\partial u} = \Phi'_n$; reste à prouver la convergence de la série $\Sigma \Phi'_n$. Or, en dérivant la formule de récurrence (6) par rapport à u et en remplaçant les dérivées de Φ_{n-1} par rapport à x et à y qui s'introduisent par des dérivées prises par rapport à u et à v, en remplaçant enfin $\frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial v}$ par sa valeur en fonction de Φ_{n-2} obtenue précédemment, on obtient

$$(7) \quad \Phi'_n(x, y) = -\frac{1}{2}\int_u^v d\zeta \int_{\zeta-u}^{\zeta+u} d\xi [\Phi'_{n-1}(\zeta-u, \xi)\, g_{12}(\xi, \zeta+u) - g_{21}(\zeta-u, \xi)\, \Phi'_{n-1}(\xi, \zeta+u)] + \Lambda,$$

Λ désignant des termes formés à partir de Φ_{n-1} et Φ_{n-2} par des intégrations; termes dont une limite supérieure du module est

$$\mathrm{K}(2\mathrm{N}a)^{n-1} \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!},$$

K étant un nombre convenablement choisi. On en déduit, en nommant P une limite supérieure de $\Phi'_1(x, y)$, que

$$|\Phi'_n(x, y)| < [(n-1)K + P](2Na)^{n-1}\frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!},$$

d'où résulte la convergence de la série $\Sigma\Phi'_n$.

Nous avons ainsi trouvé toutes les fonctions permutables avec $f(x, y)$ et finies et continues dans le domaine

$$0 \leqq x \leqq y \leqq a.$$

Elles dépendent d'une fonction arbitraire dérivable

$$\theta\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

définie dans le même domaine et telle que $\theta(0)$ soit nul.

M. Volterra les met sous une forme qui montre clairement la façon dont elles dépendent de l'arbitraire θ; il pose

$$\theta(u) = \int_0^{2u} \psi(\eta)\, d\eta$$

et constate que [1]

$$\Phi(x, y) = \int_0^{y-x} \psi(\eta)\, K(\eta \mid x, y)\, d\eta,$$

$K(\eta \mid x, y)$ étant une fonction définie pour

$$0 \leqq x \leqq y \leqq a, \qquad 0 \leqq \eta \leqq y - x,$$

d'ailleurs solution de l'équation intégrale

$$K(\eta \mid x, y) = 1 + \int_u^v d\zeta \int_\eta^{2u} [K(\eta \mid \zeta + u - \xi, \zeta + u)\, g_{21}(\zeta - u, \zeta + u - \xi) - g_{12}(\xi + \zeta - u, \zeta + u)\, K(\eta \mid \zeta - u, \xi + \zeta - u)]\, d\xi;$$

en tirant alors la valeur de $\varphi(x, y)$ de la seconde des relations (4), on trouve

$$(\alpha) \qquad \varphi(x, y) = \psi(y - x) + \int_0^{y-x} \psi(\eta)\, H(\eta \mid x, y)\, d\eta$$

---

(1) H met sous cette forme les fonctions Φ_n successives.

avec

$$\mathrm{H}(\eta\,|\,x,y) = \mathrm{K}'_y(\eta\,|\,x,y) + \int_{\eta}^{y-x} \mathrm{K}(\eta\,|\,x,\xi+x)\,g_{12}(\xi+x,y)\,d\xi.$$

Grâce à cette formule (α), M. Vessiot a démontré [1] une propriété importante des fonctions permutables : *Toutes les fonctions permutables avec la fonction $f(x,y)$ sont permutables entre elles.* Nous aurons l'occasion de retrouver, par une voie différente, cette proposition [2].

Remarquons enfin que l'on peut se donner, pour déterminer la fonction arbitraire $\psi(y-x)$, la valeur de la fonction $\varphi(x,y)$ pour $x=0$. Il viendra, en effet, pour déterminer cette fonction arbitraire, l'équation, facile à résoudre,

$$\varphi(0,y) = \psi(y) + \int_0^y \psi(\eta)\,\mathrm{H}(\eta\,|\,0,y)\,d\eta.$$

Comme la formule (α) exprime toutes les fonctions permutables avec $f(x,y)$, il est clair que ces fonctions peuvent être caractérisées par leurs valeurs en $x=0$. On pourra d'ailleurs les mettre sous la forme

$$\varphi(x,y) = \varphi(0,y-x) + \int_0^{y-x} \varphi(0,\eta)\,\mathrm{L}(\eta\,|\,x,y)\,d\eta,$$

$\mathrm{L}(\eta\,|\,x,y)$ étant une fonction facile à former à partir de $\mathrm{H}(\eta\,|\,x,y)$.

II. — Les fonctions permutables avec une fonction d'ordre n.

6. M. Volterra a traité de même [3] le problème de la recherche des fonctions permutables avec une fonction du second ordre. La méthode du paragraphe précédent s'étend sans modifications essentielles : des difficultés se présentent, au contraire, si l'on veut, comme je vais le faire dans ce paragraphe, passer au cas d'une fonction d'ordre n quelconque. Il faut, et le lecteur comprendra plus loin la

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 154, 1912, p. 682.

(2) Chapitre IV, n° 16.

(3) *Rend. dei Lincei*, 1er semestre 1911, p. 296.

raison de cette restriction, se limiter au cas où la fonction donnée est analytique et où l'on recherche les fonctions analytiques permutables avec elle.

Soit $f(x, y)$ une fonction donnée, analytique, holomorphe dans un domaine autour de $x = 0$, $y = 0$, par exemple

$$(8) \qquad |x| \leqq R, \qquad |y| \leqq R \quad (^1).$$

et d'ordre $(n+1)$, c'est-à-dire telle que

$$\left[\frac{\partial^p f(x, y)}{\partial x^s \, \partial y^{p-s}}\right]_{y=x} = 0 \qquad (\text{pour } p = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

et que

$$\left[\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^n}\right]_{y=x} = -\left[\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^{n-1} \, \partial x}\right]_{y=x} = \ldots = (-1)^n \left[\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n}\right]_{y=x} = \alpha(x),$$

$\alpha(x)$ ne s'annulant pas dans et sur le cercle de rayon R. En effectuant les deux transformations précédentes (§ I, n° 5), nous pourrons toujours supposer (en remplaçant au besoin R par un nombre plus petit) que

$$\alpha(x) = 1,$$

et que les dérivées $(n+1)^{\text{iemes}}$ de $f(x, y)$ sont nulles pour $x = y$ $(^2)$.

Cherchons à déterminer toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ holomorphes dans le domaine (8) et permutables avec $f(x, y)$. Nous prendrons comme précédemment l'inconnue auxiliaire

$$\Phi(x, y) = \int_x^y f(x, \xi)\, \varphi(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y \varphi(x, \xi) f(\xi, y)\, d\xi,$$

qui est, en même temps que $\varphi(x, y)$, une fonction holomorphe dans le domaine (8) $(^3)$. On a, d'après les conditions imposées à $f(x, y)$,

$$\left[\frac{\partial^p \Phi}{\partial x^s \, \partial y^{p-s}}\right]_{y=x} = 0 \qquad (p = 0, 1, \ldots, n)$$

---

(1) Ou dans tout autre domaine entourant un point de la multiplicité $x = y$.

(2) C'est ici qu'intervient l'hypothèse que $f(x, y)$ est d'un ordre déterminé, pour que ces changements de variables soient réguliers autour de $x = y = 0$. Nous revenons au Chapitre suivant, n° 1, sur ces changements de variables.

(3) *Cf.* Chapitre I, n° 12.

et

$$\frac{\partial^{n+1}\Phi(x,y)}{\partial x^{n+1}} = (-1)^{n-1}\varphi(x,y) + \int_x^y \frac{\partial^{n+1} f(x,\xi)}{\partial x^{n+1}}\varphi(\xi,y)\,d\xi,$$

$$\frac{\partial^{n+1}\Phi(x,y)}{\partial y^{n+1}} = \varphi(x,y) + \int_x^y \varphi(x,\xi)\frac{\partial^{n+1} f(\xi,y)}{\partial y^{n+1}}\,d\xi,$$

d'où, en résolvant ces dernières équations

$$(9)\quad \begin{cases} \varphi(x,y) = (-1)^{n+1}\dfrac{\partial^{n+1}\Phi(x,y)}{\partial x^{n+1}} + \displaystyle\int_x^y \mathrm{H}(x,\xi)\frac{\partial^{n+1}\Phi(\xi,y)}{\partial \xi^{n+1}}\,d\xi, \\ \varphi(x,y) = \dfrac{\partial^{n+1}\Phi(x,y)}{\partial y^{n+1}} + \displaystyle\int_x^y \frac{\partial^{n+1}\Phi(x,\xi)}{\partial \xi^{n+1}}\mathrm{K}(\xi,y)\,d\xi. \end{cases}$$

On en conclut que $\Phi(x,y)$ est une fonction holomorphe dans (8), vérifiant une équation intégro-différentielle qui peut s'écrire

$$(a)\quad \frac{\partial^{n+1}\Phi(x,y)}{\partial y^{n+1}} - (-1)^{n+1}\frac{\partial^{n+1}\Phi(x,y)}{\partial x^{n+1}} + \int_x^y \left[h(x,\xi)\frac{\partial^n\Phi(\xi,y)}{\partial \xi^n} - \frac{\partial^n\Phi(x,\xi)}{\partial \xi^n}k(\xi,y)\right]d\xi = 0$$

[$h(x,y)$ et $k(x,y)$ étant des fonctions connues holomorphes dans le domaine (8)] et vérifiant aussi les conditions

$$(\alpha)\quad \left(\frac{\partial^p\Phi}{\partial x^s\,\partial y^{p-s}}\right)_{y=x} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Inversement toute solution $\Phi(x,y)$ de l'équation (a) sous les conditions (α), fonction holomorphe de x et y dans le domaine (8), conduit, par application de l'une quelconque des formules (9), à une fonction $\varphi(x,y)$ répondant à la question : la recherche des fonctions $\varphi(x,y)$ est entièrement équivalente à celle des fonctions $\Phi(x,y)$.

7. Reste donc à résoudre l'équation (a) sous les conditions (α). Ici commencent les difficultés.

Supposons d'abord $n = 1$ (la fonction donnée $f(x,y)$ est du deuxième ordre). L'équation (a) s'écrit

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \int_x^y \left[h(x,\xi)\frac{\partial\Phi(\xi,y)}{\partial\xi} - \frac{\partial\Phi(x,\xi)}{\partial\xi}k(\xi,y)\right]d\xi = 0$$

ou, par une nouvelle intégration par parties,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + [h(x, x) - k(y, y)]\,\Phi(x, y)$$
$$+ \int_x^y [h'(x, \xi)\,\Phi(\xi, y) - \Phi(x, \xi)\,k'(\xi, y)]\,d\xi = 0.$$

On peut alors, utilisant une formule qui donne la solution générale de l'équation

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \lambda(x, y) = 0,$$

sous les conditions (α)

$$\Phi(x, x) = 0, \qquad \frac{\partial\Phi(x, x)}{\partial x} = 0,$$

transformer l'équation (a) en une équation *intégrale* qui se résout, comme l'équation (B) du paragraphe I, par approximations successives [1].

Mais, si n est plus grand que 1, il est impossible d'amener l'équation (a) à ne plus contenir, comme dérivées de Φ, que les deux termes

$$\frac{\partial^{n+1}\Phi(x, y)}{\partial y^{n+1}} - (-1)^{n+1}\frac{\partial^{n+1}\Phi(x, y)}{\partial x^{n+1}},$$

de sorte qu'on ne pourra plus, par le procédé employé par M. Volterra pour $n = 0$ et $n = 1$, remplacer l'équation *intégro-différentielle* (a) par une équation *intégrale*. Nous pouvons néanmoins chercher à nous prévaloir de la solution de l'équation

$$\frac{\partial^{n+1}\Phi}{\partial y^{n+1}} - (-1)^{n+1}\frac{\partial^{n+1}\Phi}{\partial x^{n+1}} = \lambda(x, y)$$

sous les conditions (α) pour transformer cette équation (a).

---

[1] Pour le détail des calculs, *cf.* VOLTERRA, *loc. cit.*, p. 38. L'hypothèse de l'analyticité n'est pas nécessaire; il suffit, comme dans le cas de $n = 0$, d'admettre l'existence des dérivées de $f(x, y)$ jusqu'à un certain ordre. Il faut aussi admettre l'existence des premières dérivées des fonctions $\varphi(x, y)$ qu'on cherche.

8. Ouvrant une parenthèse, nous allons donc résoudre l'équation

$$(a') \qquad \frac{\partial^{n+1}\Phi}{\partial y^{n+1}} - (-1)^{n+1}\frac{\partial^{n+1}\Phi}{\partial x^{n+1}} = \lambda(x, y)$$

sous les conditions (α)

$$\left(\frac{\partial^p \Phi}{\partial x^{p-s}\,\partial y^s}\right)_{y=x} = 0 \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

C'est un problème aux limites du type Cauchy pour une équation qui a des caractéristiques imaginaires (au moins dès que $n > 1$). Aussi sommes-nous obligés de supposer $\lambda(x, y)$ analytique et de nous limiter à la recherche des solutions analytiques de (a') [1]. C'est ce que nous ferons désormais.

L'équation (a') peut s'écrire symboliquement

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - m_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - m_2\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y} - m_n\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi = \lambda(x, y),$$

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ étant les racines $(n+1)^{\text{ièmes}}$ de l'unité autres que l'unité changées de signe. Ce sont donc des nombres tous différents et différents de -1. En y faisant le changement de variable déjà utilisé au paragraphe 1,

$$u = \frac{y - x}{2}, \qquad v = \frac{y + x}{2} \qquad (y = u + v,\ x = v - u),$$

elle devient

$$(a'') \qquad k\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial u} - \alpha_1\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u} - \alpha_2\frac{\partial}{\partial v}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial u} - \alpha_n\frac{\partial}{\partial v}\right)\Phi = \mu(u, v),$$

k étant un coefficient constant et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, n nombres tous différents et faciles à déduire des $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Il faut trouver

---

[1] Cette apparition d'une équation à caractéristiques imaginaires est la difficulté la plus grave que nous rencontrions dans cette étude. Si $n = 1$, la difficulté ne se présentait pas et c'est pourquoi M. Volterra a pu faire l'étude des fonctions permutables avec une fonction du second ordre sans supposer cette fonction analytique.

une solution de cette équation, nulle pour $u = 0$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n (et il suffit évidemment d'envisager les dérivées par rapport à u).

Mais la solution générale de l'équation (a'') est, si $\psi(u, v)$ est une solution particulière,

$$\psi(u, v) + \varpi_0(u) + \varpi_1(v + \alpha_1 u) + \varpi_2(v + \alpha_2 u) + \ldots + \varpi_n(v + \alpha_n u),$$

$\varpi_0, \varpi_1, \ldots, \varpi_n$ étant des fonctions analytiques arbitraires. Il est aisé d'en déduire qu'il existe une infinité de solutions de (a''), nulles ainsi que leurs dérivées d'ordre $(n-1)$ inclus, pour $u = 0$. Ces solutions ont la forme

$$\psi_1(u, v) + \varpi_0(u),$$

$\psi_1(u, v)$ étant l'une d'elles et $\varpi_0(u)$ une fonction arbitraire de u nulle, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ inclus pour $u = 0$.

Il est aisé de donner une expression très simple de $\psi_1(u, v)$: soient N_i les nombres définis par la décomposition en éléments simples

$$(10) \qquad \frac{1}{k(U - \alpha_1 V)(U - \alpha_2 V)\ldots(U - \alpha_n V)} = \frac{1}{V^{n-1}} \sum_1^n {}_i \frac{N_i}{U - \alpha_i V};$$

ils vérifient les relations

$$(11) \quad \sum_1^n {}_i N_i = 0, \quad \sum_1^n {}_i N_i \alpha_i = 0, \quad \ldots, \quad \sum_1^n {}_i N_i \alpha_i^{n-2} = 0, \quad \sum_1^n {}_i N_i \alpha_i^{n-1} \neq 0.$$

Posons

$$M(u, v) = \int_0^v d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \ldots \int_0^{\xi_{n-1}} d\xi_n \, \mu(u, \xi_n),$$

nous pouvons prendre

$$\psi_1(u, v) = \sum_1^n {}_i N_i \int_0^u d\eta_i \, M[\eta_i, v + \alpha_i(u - \eta_i)].$$

C'est bien une solution de l'équation (a'') car si l'on forme $\left(\frac{\partial}{\partial u} - \alpha_i \frac{\partial}{\partial v}\right)$

de l'intégrale coefficient de N_i on trouve $M(u, v)$. On a donc

$$\begin{aligned} & k\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial u}-\alpha_1\frac{\partial}{\partial v}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial u}-\alpha_n\frac{\partial}{\partial v}\right)\psi_1 \\ & = k\frac{\partial}{\partial v}\sum_1^n{}_i N_i\left(\frac{\partial}{\partial u}-\alpha_1\frac{\partial}{\partial v}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial u}-\alpha_{i-1}\frac{\partial}{\partial v}\right) \\ & \quad\times\left(\frac{\partial}{\partial u}-\alpha_{i+1}\frac{\partial}{\partial v}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial u}-\alpha_n\frac{\partial}{\partial v}\right)M(u, v \end{aligned}$$

ou, en vertu de l'égalité (10),

$$= \frac{\partial^n}{\partial v^n}M(u, v) = \mu(u, v).$$

D'autre part, on a

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\psi_1(u, v)}{\partial u} &= \sum N_i M(u, v) + \sum_1^n{}_i N_i\alpha_i\int_0^u d\eta\, M'[\eta, v+\alpha_i(u-\eta)], \\ \frac{\partial^2\psi_1(u, v)}{\partial u^2} &= M'(u, v)\,\Sigma N_i\alpha_i + \Sigma N_i\alpha_i^2\int_0^u d\eta\, M''[\eta, v+\alpha_i(u-\eta)], \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \frac{\partial^{n-1}\psi_1(u, v)}{\partial u^{n-1}} &= M^{(n-2)}(u, v)\,\Sigma N_i\alpha_i^{n-2} + \Sigma N_i\alpha_i^{n-1}\int_0^u d\eta\, M^{(n-1)}[\eta, v+\alpha_i(u-\eta)], \\ \frac{\partial^n\psi_1(u, v)}{\partial u^n} &= M^{(n-1)}(u, v)\,\Sigma N_i\alpha_i^{n-1} + \Sigma N_i\alpha_i^n\int_0^u d\eta\, M^{(n)}[\eta, v+\alpha_i(u-\eta)], \end{aligned}\right.$$

en posant

$$M^{(p)}(u, v) = \frac{\partial^p}{\partial v^p}M(u, v),$$

de sorte que

$$M^{(n-1)}(u, v) = \int_0^v \mu(u, \xi)\,d\xi, \qquad M^{(n)}(u, v) = \mu(u, v).$$

Des relations (11) et des premières relations (12) on déduit que, pour $u = 0$, les $(n-1)$ dérivées de ψ_1 par rapport à u, et par conséquent aussi toutes les dérivées de ψ_1 jusqu'à l'ordre $(n-1)$, sont nulles.

Mais nous désirons les solutions de l'équation (a'') nulles, ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre n inclus. Il faut pour cela, d'après

la dernière des formules (12), que

$$M^{(n-1)}(0, v) = \int_0^v \mu(0, \xi)\, d\xi = 0,$$

ce qui entraîne

$$\mu(0, v) = 0.$$

Sous cette condition il y aura une infinité de solutions du type cherché, de forme

$$(13) \qquad \sum_1^n {}_i N_i \int_0^u d\eta\, M[\eta, v + \alpha_i(u - \eta)] + \varpi(u),$$

$\varpi(u)$ étant une fonction arbitraire assujettie seulement à être nulle, ainsi que ses n premières dérivées, pour $u = 0$.

9. Tous les raisonnements précédents supposent les fonctions, sur lesquelles on opère, analytiques. Mais nous avons besoin, avant de les appliquer au problème des fonctions permutables, de préciser un peu les domaines d'existence.

Supposons que $\lambda(x, y)$ soit holomorphe pour

$$|x| \leqq R, \qquad |y| \leqq R,$$

on ne peut pas en conclure que

$$(14) \qquad \sum_1^n {}_i N_i \int_0^u d\eta\, M[\eta, v + \alpha_i(u - \eta)]$$

soit une fonction de x et de y holomorphe dans le même domaine : pour s'en rendre compte, il suffit de suivre les intégrations qui nous font passer de $\lambda(x, y)$ à (14) et de constater qu'elles obligent à sortir du domaine précédent.

Au contraire, si l'on suppose que $\lambda(x, y)$ soit holomorphe dans le domaine (coïncidant avec le premier si $n = 0$)

$$|x| \leqq R, \qquad |y| \leqq R, \qquad |v + \alpha_i u| \leqq R, \qquad |\alpha_i u| \leqq R \quad (^1) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

(1) Ce domaine est, au point de vue de l'*Analysis situs*, tout à fait analogue au domaine $|x| \leqq R$, $|y| \leqq R$: si l'on représente les deux variables x et y dans un espace à quatre dimensions, c'est un domaine de cet espace, contenant l'origine, convexe et par conséquent simplement connexe.

on peut affirmer que l'expression (14) *est holomorphe dans le même domaine.* En effet le domaine précédent peut, en introduisant les seules variables u et v, s'écrire

$$(15) \qquad |u - v| \leqq R, \qquad |v + u| \leqq R, \qquad |v + \alpha_i u| \leqq R, \qquad |\alpha_i u| \leqq R.$$

Quand on forme l'intégrale

$$\int_0^v \mu(u, \xi)\, d\xi,$$

le couple de variables u, ξ ne sort pas du domaine précédent : $\xi - u$ décrit en effet un segment de droite joignant les deux points $-u$ et $v - u$ et, comme des inégalités (15) on déduit

$$|u| \leqq R, \qquad |v - u| \leqq R,$$

on a constamment

$$|\xi - u| \leqq R;$$

des raisonnements analogues permettront de prouver que

$$|\xi + u| \leqq R, \qquad |\xi + \alpha_i u| \leqq R.$$

Ainsi les différentes intégrations nécessaires pour calculer $M(u, v)$ ne nous font pas sortir du domaine (15) et $M(u, v)$ est holomorphe dans ce domaine.

Pour prouver le même fait pour l'expression (14) il suffit de vérifier que l'intégration

$$\int_0^u M[\eta, v + \alpha_i(u - \eta)]\, d\eta$$

ne nous fait pas non plus sortir du domaine (15). En effet, dans cette intégration, la quantité complexe

$$\left.\begin{array}{c} v + \alpha_i(u - \eta) - \eta \\ v + \alpha_i(u - \eta) + \eta \\ v + \alpha_i(u - \eta) + \alpha_j \eta \\ \alpha_j \eta \end{array}\right\} \text{décrit le segment joignant} \left\{\begin{array}{c} v + \alpha_i u \text{ à } v - u, \\ v + \alpha_i u \text{ à } v + u, \\ v + \alpha_i u \text{ à } v + \alpha_j u, \\ 0 \quad \text{à} \quad \alpha_j u; \end{array}\right.$$

les extrémités de ces segments étant, d'après les formules (15), dans le cercle de rayon R, il en est de même de tout point de ces segments.

Nous pouvons enfin réunir les résultats des deux numéros précédents dans l'énoncé suivant :

Si son second membre est holomorphe dans le domaine (15) *et s'annule pour* $u = 0$, *toutes les solutions de l'équation* (a''), *holomorphes dans le même domaine et nulles ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre* n *pour* $u = 0$, *sont données par la formule*

$$\varpi(u) + \sum_{1}^{n}{}_i \, N_i \int_0^u d\eta \, M[\eta, v + \alpha_i(u - \eta)],$$

$\varpi(u)$ *étant une fonction arbitraire holomorphe dans le même domaine et nulle ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre* n *pour* $u = 0$.

On se rendra compte aisément que, pour que $\varpi(u)$ soit holomorphe dans le domaine (15), il faut et il suffit qu'elle le soit dans et sur le cercle de rayon ρ, ρ étant le plus petit des nombres R et $\frac{R}{|\alpha_i|}$.

10. Revenons enfin au problème des fonctions permutables posé au début de ce paragraphe. Nous en modifierons un peu l'énoncé : nous nous donnerons la fonction $f(x, y)$ holomorphe, non pas dans le domaine (8) du n° **6**, mais dans le domaine

$$(16) \qquad |x| \leqq R, \qquad |y| \leqq R, \qquad |v + \alpha_i u| \leqq R, \qquad |\alpha_i u| \leqq R$$

et nous rechercherons les fonctions permutables avec elle et holomorphes dans ce domaine.

Tous les raisonnements des n^{os} **6** et **7** subsistent et le problème est ramené à la recherche d'une fonction $\Phi(x, y)$ holomorphe dans le même domaine (16) [1], nulle ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n

---

[1] Par un raisonnement déjà fait bien des fois, on se rendra compte que le résultat de la composition de deux fonctions holomorphes dans (16) est une nouvelle fonction holomorphe dans (16).

inclus pour $x = y$ et vérifiant l'équation

$$(a)\qquad \frac{\partial^{n+1}\Phi}{\partial y^{n+1}} - (-1)^{n+1}\frac{\partial^{n+1}\Phi}{\partial x^{n+1}} = -\int_x^y \left[h(x,\xi)\frac{\partial^n \Phi(\xi, y)}{\partial \xi^n} - \frac{\partial^n \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^n} k(\xi, y)\right] d\xi.$$

Si nous désignons par $\mu_\Phi(u, v)$ le second membre de cette équation, il vérifie la relation $\mu_\Phi(0, v) = 0$. Des résultats précédents on déduit que Φ vérifie une équation de la forme

$$(b)\qquad \Phi(x, y) = \varpi(u) + \sum_1^n {}_i N_i \int_0^u d\eta\, M_\Phi[\eta, v + \alpha_i(u - \eta)],$$

$\varpi(u)$ étant une fonction arbitraire holomorphe dans le domaine (16) et nulle ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n pour $u = 0$, M_Φ étant formé à partir de μ_Φ comme M à partir de μ.

Cette équation (b) est intégro-différentielle, car dans M_Φ apparaissent les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de Φ. Il est impossible, sauf dans les deux cas traités par M. Volterra, de la réduire à une équation intégrale. *Mais cela n'a pas d'importance pour sa résolution*; nous allons montrer, en effet, qu'elle se comporte tout à fait comme une équation intégrale et qu'elle admet une solution et une seule holomorphe dans (16), que l'on obtient par approximations successives [1]. Il suffit de prendre

$$\Phi(x, y) = \sum_0^\infty {}_p \Phi_p(x, y)$$

avec

$$\Phi_0(x, y) = \varpi(u)$$

et

$$(17)\qquad \Phi_p(x, y) = \sum_1^n {}_i N_i \int_0^u d\eta\, M_{\Phi_{p-1}}[\eta, v + \alpha_i(u - \eta)].$$

---

[1] Comme la solution de l'équation (B) du paragraphe I.

La raison de ce fait est bien claire : l'équation (b) exprime Φ en fonction de ses dérivées $n^{\text{ièmes}}$. Mais en dérivant n fois cette équation on n'introduit pas de nouvelles dérivées de Φ, de sorte qu'on obtient, pour déterminer les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de Φ, un système d'équations intégrales auxquelles s'applique la méthode des approximations successives. Comparer aux formules (18).

Φ_p est ainsi exprimé au moyen des dérivées partielles de Φ_{p-1}. Mais on a [formules (12)]

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^n \Phi_p}{\partial u^n} &= \int_0^v \mu_{\Phi_{p-1}}(u, \xi)\, d\xi\, \Sigma N_i \alpha_i^{n-1} \\ &\quad + \Sigma N_i \alpha_i^n \int_0^u d\eta\, \mu_{\Phi_{p-1}}[\eta, v + \alpha_i(u-\eta)] \\ \frac{\partial^n \Phi_p}{\partial u^{n-q}\, \partial v^q} &= \Sigma N_i \alpha_i^{n-q} \int_0^u d\eta\, \mu_{\Phi_{p-1}}[\eta, v + \alpha_i(u-\eta)] \\ &\qquad (q = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right.$$

formules qui expriment les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de Φ_p en fonction de celles de Φ_{p-1}. De ces formules (18) on déduit l'existence d'un nombre K indépendant de p, tel que, si les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de Φ_{p-1} sont limitées par $K^p \frac{|y-x|^{p-1}}{(p-1)!}$, les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de Φ_p soient limitées par $K^{p+1} \frac{|y-x|^p}{p!}$. Il en résulte la convergence de séries formées par dérivées $n^{\text{ièmes}}$ des Φ_p, et enfin celle de la série des Φ_p dont les termes sont formés, à partir des termes des séries précédentes, par les intégrations exprimées par la formule (17).

Ainsi, quelle que soit la fonction $\varpi(u)$ holomorphe dans (16), l'équation (b) admet une solution holomorphe dans (16), solution dont on prouvera sans peine l'unicité. Le passage de l'équation (b) à l'équation (a) ne souffre aucune difficulté et nous obtenons ainsi toutes les fonctions $\Phi(x, y)$ et enfin toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec $f(x, y)$ et holomorphes dans (16). Elles dépendent d'une fonction arbitraire $\varpi\left(\frac{y-x}{2}\right)$ holomorphe dans (16), c'est-à-dire (fin du n° 9) lorsque

$$\left|\frac{y-x}{2}\right| \leqq \rho,$$

ρ étant le plus petit des nombres R et $\frac{R}{|\alpha_i|}$.

Comme toute fonction holomorphe dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$, sera holomorphe dans un domaine tel que (16) correspondant à une valeur de R assez petite, on peut encore interpréter comme suit le résultat précédent :

Soit $f(x, y)$ une fonction holomorphe autour de $x = y = 0$ (ou de tout autre point de la multiplicité $x = y$) et d'un ordre déterminé autour de ce point. Nous savons, d'après ce qui précède, déterminer toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ holomorphes autour de ce point et permutables avec $f(x, y)$.

III. — De quelques propriétés des fonctions permutables.

11. Les propriétés que nous étudions dans ce numéro trouveront leur application au Chapitre suivant.

En se reportant à l'équation (b) on vérifie sans peine que :

La solution $\Phi(x, y)$ de l'équation (b) a le même ordre que la fonction arbitraire $\varpi\left(\frac{y-x}{2}\right)$ et, si $n + 2 + q$ est cet ordre $(q \geqq 0)$, on a

$$\Phi^{(n+1+q)}(x, x) = \varpi^{(n+1+q)}(0) = \text{const.},$$

$\Phi^{(n+1+q)}(x, y)$ désignant, comme au Chapitre I (n° **15**), la dérivée $(n + 1 + q)^{\text{ième}}$ de $\Phi(x, y)$ par rapport à y. La fonction $\varphi(x, y)$ correspondante est d'ordre $(1 + q)$ et l'on a

$$\varphi^{(q)}(x, x) = \Phi^{(n+1+q)}(x, x) = \text{const.}$$

Ceci suppose que

$$f^{(n)}(x, x) = 1;$$

en effectuant en sens inverse le changement de variable (§ I, n° **5**) qui nous avait permis de réaliser cette dernière égalité, on constate que, dans le cas général, on a

$$\frac{[\varphi^{(q)}(x, x)]^{n+1}}{[f^{(n)}(x, x)]^{q+1}} = \text{const.}, \tag{19}$$

la constante pouvant d'ailleurs prendre une valeur arbitraire.

Ce résultat généralise celui de M. Volterra, d'après lequel, si $f(x, y)$ est du premier ordre, on a

$$\frac{\varphi(x, x)}{f(x, x)} = \text{const.}$$

Il trouvera son application au Chapitre suivant par la conséquence

que voici. Supposons que $(n+1) = p(q+1)$, p étant un entier. Il vient

$$[\varphi^{(q)}(x, x)]^p = \mathrm{K} f^{(n)}(x, x) \qquad (\mathrm{K} = \text{const.})$$

et l'on en conclut aisément [1], en multipliant φ par une constante convenable, que :

On peut toujours trouver une fonction $\varphi(x, y)$ d'ordre $q+1$ permutable avec $f(x, y)$ telle que

$$\overset{*}{\varphi}{}^p(x, y) - f(x, y)$$

soit d'ordre supérieur à $n+1$.

12. Un cas particulier important, particulièrement pour la théorie de l'hérédité, est celui où la fonction $f(x, y)$ pour laquelle on résout le problème précédent ne dépend que de la différence $y - x$.

Soit $f(y-x)$ cette fonction. Les deux fonctions $h(x, y)$ et $k(x, y)$ qui s'introduisent dans l'équation intégro-différentielle (a) sont aussi de simples fonctions de $y - x$ et telles de plus que

$$k(y-x) = (-1)^n h(y-x).$$

Si, tenant compte de cette relation, on forme les approximations successives qui, au n° **10**, nous ont servi à résoudre l'équation (a), on constate que toutes ces approximations sont nulles, sauf la première, et l'on trouve

$$\Phi(x, y) = \varpi\left(\frac{y-x}{2}\right).$$

Les fonctions permutables avec $f(y-x)$ sont de la forme $\varphi(y-x)$ et il est d'ailleurs bien évident qu'une fonction quelconque de ce type sera permutable avec $f(y-x)$.

13. Les fonctions permutables avec $f(y-x)$ ainsi trouvées jouissent de propriétés importantes qu'il est naturel de chercher à étendre aux fonctions permutables les plus générales :

---

[1] Se reporter aux remarques de la note 1 de la page 17, Chapitre I.

I. Toutes les fonctions permutables avec $f(y-x)$ sont permutables entre elles.

Nous avons déjà indiqué cette propriété pour les fonctions permutables avec une fonction $f(x,y)$ du premier ordre (n° **5**). Au Chapitre IV (n° **16**) nous la retrouverons dans le cas général.

II. Une fonction permutable avec $f(y-x)$ et holomorphe autour d'un point de la multiplicité $y=x$ est holomorphe au voisinage de tout point de cette multiplicité.

C'est l'extension de ce résultat que je veux présenter ici. Elle prend la forme suivante :

Théorème. — *Soit, dans le plan où nous représentons les deux variables complexes x et y, un domaine $\mathfrak{D}$ simplement connexe tel que la fonction $f(x,y)$* (¹) *soit holomorphe autour de tout point $y=x_0$, $x=x_0$, x_0 étant intérieur à $\mathfrak{D}$ ou sur sa frontière. Toute fonction permutable avec $f(x,y)$ et holomorphe autour de $x=a$, $y=a$, a étant un point intérieur à $\mathfrak{D}$, est de même holomorphe autour de $x=x_0$, $y=x_0$, x_0 étant un point quelconque intérieur à $\mathfrak{D}$.*

Nous supposerons dans la démonstration que a soit l'origine o. Soit donc $\varphi(x,y)$ permutable avec $f(x,y)$ et holomorphe autour de de l'origine; la fonction $\Phi(x,y)=f\varphi(x,y)$ sera, d'après ce qui précède, donnée par la résolution de

$$(b)\qquad \Phi(x,y)=\varpi(u)+\sum_{1}^{n}{}_i N_i\int_0^u M_\Phi[\eta_i, v+\alpha_i(u-\eta_i)]\,d\eta_i,$$

$\varpi(u)$ étant une fonction holomorphe autour de $u=0$.

Étant données les hypothèses faites sur la fonction $f(x,y)$, nous pouvons toujours choisir un nombre ρ assez petit pour que cette fonc-

(¹) Nous prenons la fonction $f(x,y)$ sur laquelle on ait effectué le changement de variables du n° 3, rendant ainsi égale à 1 la première dérivée non identiquement nulle pour $x=y$, et égale à zéro la dérivée suivante. Il n'y a pas de difficultés, on le verra au Chapitre suivant, à passer de là au cas général (Chap. III, p. 56).

tion soit holomorphe dans le domaine suivant :

$$(\Delta)\quad \begin{cases} \text{(le point du plan complexe représentant } v \text{ est dans } \mathfrak{D} \text{ ou sur } \mathfrak{D}), \\ |u| \quad \text{et} \quad |\alpha_j u| \leqq r_v \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \\ |u| \leqq \rho, \end{cases}$$

r_v étant la plus courte distance v à la frontière du domaine $\mathfrak{D}$. ρ étant enfin choisi assez petit pour que $\varpi(u)$ soit analytique dans le même domaine, je dis que les approximations successives qui servent à résoudre (b) convergent dans le domaine Δ. Cette convergence sera immédiate, si nous prouvons seulement qu'elles permettent, partant d'un $\Phi_{n-1}(x, y)$ défini dans Δ, d'en déduire un $\Phi_n(x, y)$ lui aussi défini dans tout Δ; en d'autres termes, si elles ne nous font pas sortir du domaine Δ.

Mais $\Phi_{n-1}(x, y)$ étant donné, il faut pour former $\mu_{\Phi_{n-1}}(u, v)$ en calculer les compositions avec $h(x, y)$ et $k(x, y)$. Ces compositions peuvent s'effectuer en faisant décrire à ξ le segment de droite xy sans que les couples de variables $x\xi$ et ξy sortent du domaine Δ : en effet tous les points du segment x, y, et en particulier $\frac{x+\xi}{2}$ et $\frac{\xi+y}{2}$, sont intérieurs à $\mathfrak{D}$, et l'on a de plus

$$r_{\frac{x+\xi}{2}} = r_v - \frac{|y-\xi|}{2}, \qquad r_{\frac{\xi+y}{2}} = r_v - \frac{|\xi - x|}{2};$$

tout revient alors à démontrer des relations telles que

$$\frac{|\xi - x|}{2} \qquad \text{et} \qquad \alpha_j \left|\frac{\xi - x}{2}\right| \leqq r_v - \frac{|y-\xi|}{2};$$

c'est une conséquence des relations (Δ).

Pour former $M_{\Phi_{n-1}}(u, v)$ à partir de $\mu_{\Phi_{n-1}}(u, v)$ il faut effectuer des intégrations telles que

$$\int_0^v \mu(u, \xi)\, d\xi.$$

Or, quand u est donné, ξ peut prendre dans le plan toutes les valeurs intérieures à $\mathfrak{D}$ et telles que $|u|$ et $|\alpha_j u| \leqq r_\xi$. Cette condition définira un certain domaine $\mathfrak{D}'$ intérieur à $\mathfrak{D}$, qui, si ρ est pris assez petit, sera

toujours connexe [1]. Ce domaine contient l'origine et le point v, et l'intégrale

$$\int_0^v \mu(u, \xi)\, d\xi$$

y est définie sans difficultés.

Reste enfin le calcul de l'intégrale

$$\int_0^u \mathrm{M}[\eta, v + \alpha_i(u - \eta)]\, d\eta$$

qui n'offre pas de difficultés si l'on fait décrire à η le segment de droite o, u :

$$v + \alpha_i(u - \eta)$$

reste dans $\mathfrak{D}$ et il est aisé de vérifier que

$$|\eta| \qquad \text{et} \qquad |\alpha_j \eta| \leqq r_{v+\alpha_i(u-\eta)}.$$

Le théorème annoncé est ainsi démontré : il subsisterait si le domaine $\mathfrak{D}$ était tracé sur une surface de Riemann.

IV. — Les fonctions permutables avec une fonction non analytique.

14. Nous avons supposé jusqu'à présent, tant pour simplifier que pour avoir des énoncés directement comparables à ceux que nous obtiendrons par d'autres procédés au Chapitre IV, que la fonction donnée et les fonctions cherchées étaient analytiques.

La méthode précédente peut s'appliquer à des cas un peu plus étendus. L'analyticité est intervenue quand on a voulu résoudre l'équation

$$\frac{\partial^{n+1}\Phi}{\partial y^{n+1}} - (-1)^{n+1}\frac{\partial^{n+1}\Phi}{\partial x^{n+1}} = \mu(u, v)$$

avec des conditions limites du type de Cauchy, par la formule

$$\varpi(u) + \int_0^u \sum_1^n {}_i \mathrm{N}_i \mathrm{M}[\eta, v + \alpha_i(u - \eta)]\, d\eta.$$

---

[1] Pourvu que $\mathfrak{D}$ soit un domaine simple, ce qui peut toujours être le cas.

Le lecteur se rendra compte que tous les résultats du paragraphe II subsistent si l'on suppose la fonction donnée $f(x, y)$ définie lorsque

$$u \text{ réel} \qquad \text{et} \qquad -a \leqq u \leqq +a,$$

et

$$|v - u| \leqq R, \qquad |v + u| \leqq R, \qquad |v + \alpha_i u| \leqq R$$

avec

$$|a| \leqq R, \qquad |\alpha_i a| \leqq R,$$

cette fonction étant analytique en v et seulement dérivable jusqu'à un certain ordre en u. Il faut faire les mêmes hypothèses sur la fonction cherchée $\varphi(x, y)$.

15. Dans le cas où la fonction $f(x, y)$ n'est pas du type précédent et est d'un ordre supérieur au second [1], le problème de la recherche des fonctions permutables présente des difficultés difficilement surmontables. Sont-elles inhérentes au problème posé, ou simplement à la méthode employée? Je dois me contenter ici de poser la question.

CHAPITRE III.

COMPLÉMENTS ET APPLICATIONS DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

I. — Étude des fonctions permutables avec $f(x, y)$ autour d'un point où elle n'est d'aucun ordre.

1. Revenons sur les deux changements de variable indiqués au n° **6** du Chapitre précédent : l'équation

$$\overset{*}{f}\,\overset{*}{\varphi}(x, y) = \overset{*}{\varphi}\,\overset{*}{f}(x, y)$$

est invariante, c'est-à-dire se transforme successivement en

$$\overset{*}{f_1}\,\overset{*}{\varphi_1}(x_1, y_1) = \overset{*}{\varphi_1}\,\overset{*}{f_1}(x_1, y_1), \qquad \overset{*}{f_2}\,\overset{*}{\varphi_2}(x_1, y_1) = \overset{*}{\varphi_2}\,\overset{*}{f_2}(x_1, y_1)$$

---

[1] *Cf.* n° 8, p. 42.

par les transformations

$$(1)\qquad \begin{cases} x = g(x_1) \qquad [y = g(y_1),\ \xi = g(\xi_1)], \\ f_1(x_1, y_1) = \pm\sqrt{g'(x_1)g'(y_1)}\, f(x, y), \\ \varphi_1(x_1, y_1) = \pm\sqrt{g'(x_1)g'(y_1)}\, \varphi(x, y) \end{cases}$$

et

$$(2)\qquad \begin{cases} f_2(x_1, y_1) = f_1(x_1, y_1)\dfrac{m(x_1)}{m(y_1)}, \\ \varphi_2(x_1, y_1) = \varphi_1(x_1, y_1)\dfrac{m(x_1)}{m(y_1)}. \end{cases}$$

Pour que, la fonction $f(x,y)$ étant d'ordre $n+1$, la fonction $f_2(x_1, y_1)$ soit telle que

$$\left[\frac{\partial^n f_2(x_1, y_1)}{\partial y_1^n}\right]_{y_1=x_1} = 1, \qquad \left[\frac{\partial^{n+1} f_2(x_1, y_1)}{\partial y_1^{n+1}}\right]_{y_1=x_1} = 0,$$

il faut prendre, pour la relation entre x et x_1,

$$(1)\qquad x_1 = \int [\pm\alpha(x)]^{\frac{1}{n+1}} dx \qquad \text{avec} \qquad \alpha(x) = \left[\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right]_{y=x}$$

et pour valeur de $m(x_1)$

$$(2)\qquad m(x_1) = e^{\frac{1}{n+1}\int\left[\frac{\partial^{n+1} f_1(x_1, y_1)}{\partial y_1^{n+1}}\right]_{y_1=x_1} dx_1}.$$

Autour d'un point $x = a$, $y = a$ tel que la fonction $f(x,y)$ soit d'un ordre $n+1$ déterminé $[\alpha(a) \neq 0]$ la transformation (1) est régulière et inversable et les transformations précédentes ramènent, comme nous l'avions déjà indiqué (Chap. II, n° **6**), la recherche des fonctions permutables avec $f(x,y)$ à celle, effectuée au Chapitre précédent, des fonctions permutables avec $f_2(x_1, y_1)$.

On peut aller plus loin en appliquant les transformations précédentes au théorème du Chapitre II (n° **15**) : soit un domaine D simplement connexe du plan complexe sur lequel nous représentons les variables x et y, domaine évitant les zéros de $\alpha(x)$ et pouvant les contourner pour venir se recouvrir lui-même (mais nous le supposerons alors tracé sur une surface de Riemann se ramifiant autour de ces zéros); par la transformation (1) lui correspondra biunivoquement un domaine $\mathfrak{D}$

du plan complexe dans lequel nous représentons les variables x_1 et y_1; le théorème du Chapitre II (n° **15**) s'applique à ce domaine et nous obtenons le résultat suivant : Toute fonction permutable avec $f(x, y)$ et holomorphe autour de $x = a$, $y = a$, a étant un point du domaine D, est holomorphe autour de $x = b$, $y = b$, b étant un point quelconque du domaine D. Puisque D peut être quelconque, pourvu qu'il évite les zéros de $\alpha(x)$, on peut encore dire :

Toute fonction analytique permutable avec $f(x, y)$ est holomorphe autour de tout point $x = a$, $y = a$ autour duquel $f(x, y)$ est d'un ordre déterminé.

2. Pour que l'étude autour de la multiplicité $y = x$ (¹) des fonctions permutables avec $f(x, y)$ soit terminée, il nous reste à étudier les mêmes fonctions autour d'un point pour lequel $f(x, y)$ n'est pas d'un ordre déterminé : nous supposerons que ce point soit $x = y = 0$ et que la première dérivée de $f(x, y)$ non identiquement nulle pour $x = y$ soit

$$\left[\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^n}\right]_{y=x} = \alpha(x) = x^a(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots),$$

a entier positif et non nul.

L'équation (1) a alors la forme

$$x_1 = x^{\frac{a}{n+1}+1}(\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \ldots)$$

et définit une correspondance biunivoque, non plus entre le voisinage de l'origine de deux plans, mais entre le voisinage de l'origine de deux surfaces de Riemann, à nombre fini de feuillets se ramifiant autour de l'origine. La fonction $f_1(x_1, y_1)$ admet alors les points critiques $x_1 = 0$, et $y_1 = 0$, et il en est de même de la fonction $f_2(x_1, y_1)$ (²);

(¹) Cette multiplicité joue dans la théorie en question un rôle analogue à celui que joue, dans la théorie du problème de Cauchy (pour les équations aux dérivées partielles), la multiplicité qui porte les données aux limites.

(²) Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté dans la définition de $f_1(x_1, y_1)$ et $f_2(x_1, y_1)$ il faut partir d'une détermination de ces fonctions et la suivre par continuité.

cette dernière sera une fonction bien définie des points x_1 et y_1 représentés non plus dans le plan, mais sur une surface de Riemann ayant un point de ramification d'ordre infini autour de l'origine. Si, par exemple, $f(x, y) = ax + by$ avec, pour simplifier, $a + b = 1$, il vient

$$x_1 = x^2,$$

$$f_1(x_1, y_1) = \frac{a x_1^{\frac{1}{2}} + b y_1^{\frac{1}{2}}}{x_1^{\frac{1}{2}} y_1^{\frac{1}{2}}}, \qquad f_2(x_1, y_1) = \frac{a x_1^{\frac{1}{2}} + b y_1^{\frac{1}{2}}}{x_1^{\frac{a}{2}} y_1^{\frac{b}{2}}}.$$

On peut alors utiliser les formules du Chapitre précédent pour se faire une idée de la singularité autour de l'origine des fonctions permutables avec $f_2(x_1, y_1)$ et donc avec $f(x, y)$. Nous ne ferons pas cette étude, car, et c'est là un point qui sera montré au Chapitre IV (n° 9), la méthode précédente donnerait une idée très imparfaite et trop compliquée des singularités de ces fonctions.

3. Nous nous occuperons seulement du cas particulier le plus simple : c'est celui où, bien que l'origine soit un zéro de $\alpha(x)$, la fonction $f_2(x_1, y_1)$ est une fonction holomorphe de x_1 et y_1 autour de $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Cherchons d'abord à le caractériser.

On doit avoir alors

$$f_2(x_1, y_1) = f(x, y)\sqrt{g'(x_1)\, g'(y_1)}\,\frac{m(x_1)}{m(y_1)}, \tag{3}$$

$m(x_1)$ étant analytique autour de l'origine, mais ayant d'ordinaire cette origine pour point critique, la relation $x = g(x_1)$ étant la relation inverse de

$$x_1 = x^{\frac{a}{n+1}+1}(\mu_0 + \mu_1 x + \ldots) \qquad (\text{ou } x_1 = h(x)],$$

les fonctions f et f_2 étant fonctions holomorphes autour de l'origine des variables qui y figurent et contenant respectivement en facteur $(y - x)^n$ et $(y_1 - x_1)^n$. La fonction f_2 vérifie de plus les conditions

$$\left[\frac{\partial^n f_2(x_1, y_1)}{\partial y_1^n}\right]_{y_1 = x_1} = 1, \qquad \left[\frac{\partial^{n+1} f_2(x_1, y_1)}{\partial y_1^{n+1}}\right]_{y_1 = x_1} = 0 \quad (^1).$$

(1) Cette seconde condition n'a rien d'essentiel ; on peut toujours la réaliser sans troubler l'analyticité de $f_2(x_1, y_1)$ en multipliant cette fonction par une autre bien choisie.

On peut remplacer (3) par

$$(3') \qquad f(x, y) = f_2(x_1, y_1)\sqrt{h'(x)\,h'(y)}\,\frac{n(x)}{n(y)},$$

$n(x)$ ayant, comme $m(x_1)$, l'origine pour point critique et

$$h'(x) = \frac{1}{g'(x_1)} = x^{\frac{a}{n+1}}(\nu_0 + \nu_1 x + \ldots).$$

L'équation (3′) *entraîne d'abord que a soit un multiple de* $n+1$. Supposons en effet que non, $\frac{a}{n+1} + 1$ est alors égal à une fraction irréductible $\frac{p}{q}$. De (3′) on tire

$$(4) \qquad \frac{n(x)}{n(y)} = \frac{f(x, y)}{f_2(x_1, y_1)\sqrt{h'(x)\,h'(y)}},$$

et la partie principale du second membre quand x et y sont tous deux infiniment petits du même ordre, partie principale qui s'écrit

$$\frac{(y-x)^n p(x, y)}{\left(y^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}\right)^n \mu_0^n \nu_0\, x^{\frac{a}{2(n+1)}} y^{\frac{a}{2(n+1)}}},$$

ne peut pas être le quotient de deux fonctions de x et de y.

Il faut donc que a soit multiple de $n+1$, soit $a = k(n+1)$, k étant un entier positif [1]. On peut alors se donner arbitrairement la fonction holomorphe $f_2(x_1, y_1)$ d'ordre $n+1$ autour de l'origine (*cf.* note 1, page 58), et le changement de variable

$$x_1 = x^{k+1}(\mu_0 + \mu_1 x + \ldots)$$

(ce qui détermine $\nu_0, \nu_1, \ldots$).

On doit avoir

$$f(x, y) = f_2(x_1, y_1)\, x^{\frac{k}{2}} y^{\frac{k}{2}} \sqrt{(\nu_0 + \nu_1 x + \ldots)(\nu_0 + \nu_1 y + \ldots)}\,\frac{n(x)}{n(y)},$$

$f(x, y)$ étant holomorphe. Il en résulte immédiatement que $n(x)$ est de forme $x^{\pi} n_0(x)$, $n_0(x)$ étant holomorphe et telle que $n_0(0) \neq 0$, et

---

[1] Le cas où k serait nul a déjà fait l'objet du Chapitre précédent.

l'indice π étant tel que les nombres $\frac{k}{2}+\pi$ et $\frac{k}{2}-\pi$ soient entiers et positifs. On a finalement

$$(5)\quad f(x,y)=f_2(x_1,y_1)x^\alpha y^\beta\sqrt{(\nu_0+\nu_1 x+\ldots)(\nu_0+\nu_1 y+\ldots)}\frac{n_0(x)}{n_0(y)},$$

α et β étant deux entiers positifs quelconques dont la somme donne k.

Voici donc comment s'obtiendront toutes les fonctions $f(x,y)$ holomorphes telles que la fonction $f_2(x_1,y_1)$ correspondante soit, elle aussi, holomorphe. *Il suffira de partir de toutes les fonctions $f_2(x_1,y_1)$ holomorphes et d'ordre $n+1$ autour de $x_1=y_1=0$ et d'y faire tous les changements de variables*

$$x_1=x^{k+1}(\mu_0+\mu_1 x+\ldots),$$

d'en déduire enfin $f(x,y)$ par la formule (5); α et β étant deux entiers positifs arbitraires dont la somme est k; $n_0(x)$, une fonction holomorphe arbitraire non nulle pour $x=0$.

4. Les fonctions $\varphi(x,y)$ permutables avec $f(x,y)$ s'obtiendront en appliquant la formule (5) aux fonctions $\varphi_2(x_1,y_1)$ permutables avec $f_2(x_1,y_1)$. Il en résulte que : *Une fonction $\varphi(x,y)$ permutable avec $f(x,y)$ et holomorphe autour d'un point $x=\alpha$, $y=\alpha$ de la multiplicité $x=y$ est holomorphe, non seulement autour de tous les points de cette multiplicité, tels que $f(x,y)$ y soit d'un ordre donné, mais encore autour du point $x=0$, $y=0$.*

5. Donnons une application simple des considérations précédentes : les fonctions permutables avec l'unité sont de forme

$$\varphi(y_1-x_1)$$

en faisant le changement de variable $x_1=x^{k+1}$, on prouve que les fonctions permutables avec $x^\alpha y^\beta$ (avec $\alpha+\beta=k$) sont les fonctions

$$x^\alpha y^\beta\varphi(y^{\alpha+\beta+1}-x^{\alpha+\beta+1}).$$

C'est un point qu'il est d'ailleurs aisé de démontrer directement.

II. — Application à la résolution d'une équation intégrale.

6. La recherche, exposée au Chapitre précédent, des fonctions permutables avec une fonction donnée permet de résoudre l'équation intégrale

$$\text{(E)} \qquad \overset{*}{\psi}{}^p(x, y) = f(x, y)$$

par rapport à l'inconnue $\psi(x, y)$. Cette résolution est très importante, car elle permet d'introduire dans la théorie des fonctions permutables le symbole $\sqrt[p]{}$, et d'étendre ainsi à des relations implicites intégrales du genre de celles envisagées au Chapitre I (§ I) la théorie de Puiseux [1].

Si la solution $\psi(x, y)$ admet en facteur $(y - x)^q$, il est facile de se rendre compte que $\overset{*}{\psi}{}^p(x, y)$ admettra en facteur $(y - x)^{pq+p-1}$ [2]. Il faudra donc supposer que $f(x, y)$ ait en facteur $(y - x)^n$, $n + 1$ étant un multiple de p. Nous ferons même, d'abord, l'hypothèse plus restrictive suivante : $f(x, y)$ est *d'ordre* $n + 1$ multiple de p.

Le cas où $(n + 1) = 2$ et où $p = 2$ a été traité par M. Volterra qui a de plus montré [3] le lien qui existe en général entre la résolution de l'équation (E) et le problème qui nous a occupé au Chapitre II. Voici, en utilisant les résultats de M. Volterra et les résultats démontrés au Chapitre II (§ II), comment on peut résoudre l'équation (E) quand son second membre $f(x, y)$ est holomorphe.

7. Nous établirons que :

L'équation

$$\text{(E)} \qquad \overset{*}{\psi}{}^p(x, y) = f(x, y),$$

---

[1] Nous n'insisterons pas sur ce point de vue développé par M. Volterra (*cf. Leçons sur les fonctions de lignes*, p. 178). Il nous a suffi de montrer l'intérêt de l'équation (E).

[2] *Cf.* Chapitre I, p. 17, note 1.

[3] *Cf. Leçons sur les fonctions de lignes*, p. 170-178.

$f(x, y)$ étant holomorphe autour de $x = y = 0$ et d'ordre $n + 1$ multiple de p, admet autour de ce point p solutions holomorphes et p seulement. Ces solutions se déduisent de l'une d'elles en la multipliant par les p racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Elles sont d'ordre $\frac{n+1}{p} = q + 1$.

Il est tout d'abord clair que les solutions holomorphes seront d'ordre $\frac{n+1}{p} = q + 1$.

Prouvons leur existence : d'après un résultat précédent (Chap. II, n° **11**) nous pouvons trouver une fonction $\varphi(x, y)$ permutable avec $f(x, y)$, d'ordre $q + 1$ et telle que

$$f(x, y) - \overset{*}{\varphi}{}^p(x, y)$$

soit d'ordre au moins $n + 2$. L'équation en $\chi(x, y)$

$$f(x, y) - \overset{*}{\varphi}{}^p(x, y) = \overset{*}{\varphi}{}^p \overset{*}{\chi}(x, y)$$

aura alors une solution holomorphe et permutable avec $\varphi(x, y)$ (Chap. I, n° **10**) et l'on pourra prendre pour solution de l'équation (E)

$$\psi(x, y) = \alpha_i \left[\varphi + \frac{1}{p} \overset{*}{\varphi} \overset{*}{\chi} + \frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)}{2!} \overset{*}{\varphi} \overset{*}{\chi}{}^2 + \ldots \right],$$

α_i étant l'une quelconque des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité [1].

---

[1] Remarquons que la théorie de l'équation (E) repose en dernière analyse sur la formule (19) du Chapitre II, du n° 11, grâce à laquelle on pouvait affirmer l'existence d'une fonction $\varphi(x, y)$ permutable avec $f(x, y)$ et telle que $f(x, y) - \overset{*}{\varphi}{}^p(x, y)$ soit au moins d'ordre $n + 2$. Jusqu'à présent cette formule est démontrée comme conséquence de la recherche des fonctions permutables, c'est-à-dire sous bien des restrictions. Nous la démontrerons au Chapitre IV (n° 3) directement, sans restrictions autres que l'existence de quelques dérivées. Dès lors, toutes les fois que nous connaîtrons, peu importe comment, une fonction $\varphi(x, y)$ d'ordre $q + 1$ permutable avec $f(x, y)$, nous pourrons toujours, en la multipliant par une constante, faire en sorte que $f(x, y) - \overset{*}{\varphi}{}^p(x, y)$ soit au moins d'ordre $n + 2$, *c'est-à-dire résoudre l'équation* (E).

Prouvons enfin qu'il n'y a pas d'autre solution : en d'autres termes que, si ψ_1 et ψ_2 sont deux solutions de l'équation (E), on a

$$\psi_1 = \alpha_i \psi_2.$$

On aura en effet

$$\overset{*}{\psi}{}_1^p - \overset{*}{\psi}{}_2^p = 0,$$

d'où, en posant

$$\psi_1 - \alpha_i \psi_2 = \Psi_i,$$

$$(6) \qquad \overset{*}{\Psi}_1 \overset{*}{\Psi}_2 \ldots \overset{*}{\Psi}_p + \overset{*}{\Psi}_2 \overset{*}{\Psi}_3 \ldots \overset{*}{\Psi}_p \overset{*}{\Psi}_1 + \ldots + \overset{*}{\Psi}_p \overset{*}{\Psi}_1 \ldots \overset{*}{\Psi}_{p-1} = 0.$$

Cette équation entraîne que l'un des Ψ_i soit nul : sinon, en effet, le développement de chacun d'eux considéré comme fonction de y, développement effectué suivant les puissances de $y - x$, commencerait par un terme dont le coefficient est une fonction non identiquement nulle $b_i(x)$. Le développement analogue du premier membre de (6) commencerait par un terme de coefficient

$$b_1(x)\, b_2(x) \ldots b_p(x)$$

(à un facteur constant près) non identiquement nul.

Remarquons enfin que les solutions de l'équation (E) sont permutables avec $f(x, y)$: cela résulte de la formule donnant ces solutions. On pourrait le démontrer directement.

8. La méthode précédente pourra s'appliquer quand on remplace l'hypothèse d'analyticité de $f(x, y)$ par des hypothèses moins restrictives. En voici une autre, strictement limitée au cas où $f(x, y)$ est analytique, qui nous sera utile dans l'étude de la solution $\psi(x, y)$ autour d'un point où $f(x, y)$ cesse d'être d'ordre $n + 1$.

Étudions l'équation (E) autour du point $x = 0$, $y = 0$; $f(x, y)$ peut être définie par une série

$$\sum_{n}^{\infty}{}_i \frac{(y - x)^i}{i!} f^{(i)}(x)$$

dont les coefficients $f^{(i)}(x)$ sont holomorphes. Nous chercherons à

calculer $\psi(x, y)$ par une série à coefficients holomorphes

$$\sum_{q}^{\infty}{}_{i} \frac{(y-x)^i}{i!} \psi^{(i)}(x).$$

La méthode que nous allons donner est donc analogue à celle du Chapitre I (n° **15**) pour résoudre l'équation de Volterra. Il vient, pour déterminer les $\psi^{(i)}(x)$, les équations

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{c} [\psi^{(q)}(x)]^p = f^{(pq+p-1)}(x) \qquad (pq+p-1=n), \\ p[\psi^{(q)}(x)]^{p-1}\psi^{(q+1)}(x) + \Phi_1[\psi^{(q)}(x)] = f^{(pq+p)}(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ p[\psi^{(q)}(x)]^{p-1}\psi^{(q+j)}(x) + \Phi_j(\psi^{(q)}, \psi^{(q+1)}, \dots, \psi^{(q+j-1)}) = f^{(pq+p-1+j)}(x). \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array}\right.$$

Φ_j étant un polynome par rapport à $\psi^{(q)}, \psi^{(q+1)}, \dots \psi^{(q+j-1)}$ et leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. La première équation donne

$$\psi^{(q)}(x) = [f^{(n)}(x)]^{\frac{1}{p}}$$

et les suivantes déterminent, par résolution d'équations du premier degré,

$$\psi^{(q+1)}(x), \quad \psi^{(q+2)}(x), \quad \dots, \quad \psi^{(q+j)}(x).$$

Deux cas sont à distinguer :

1° $f(x, y)$ est d'ordre $n+1$ autour de $x=0$, $y=0$. Alors $f^{(n)}(0)$ est différent de zéro ; $\psi^{(q)}(0)$ aussi, $\psi^{(q)}(x)$ est holomorphe autour de $x=0$ et il en est de même des $\psi^{(q+j)}(x)$ successives. La convergence de la série

$$\sum_{q}^{\infty}{}_{i} \frac{(y-x)^i}{i!} \psi^{(i)}(x)$$

peut s'établir directement. Elle est d'ailleurs une conséquence de l'existence de p, et de p seulement, solutions holomorphes de l'équation (E), solutions pouvant s'obtenir à partir de l'une d'elles par multiplication par les racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

2° $f(x, y)$ n'est pas d'ordre $(n+1)$ autour de $x=0$, $y=0$. Alors $f^{(n)}(0)$ est nul et les fonctions $\psi^{(q+j)}(x)$ successives ne sont pas,

en général, holomorphes : pas de solution holomorphe autour de l'origine, du moins en général.

Dans des cas particuliers, pourtant, notre équation aura ses solutions holomorphes, et notre méthode va nous permettre, comme au Chapitre I, de caractériser ces cas : il faudra d'abord que les fonctions $\psi^{(q+j)}(x)$ déterminées par les relations (7) soient holomorphes. Le développement

$$\sum_{q}^{\infty}{}_i \frac{\psi^{(i)}(x)}{i!}(y-x)^i$$

satisfera alors formellement à l'équation (E). *Il y satisfera aussi effectivement;* la démonstration est la même qu'au Chapitre I (n° **16**). Les p solutions de l'équation (E) sont alors holomorphes autour de $x=0, y=0$.

9. Nous venons de dire que dans le deuxième cas une solution $\psi(x, y)$ de l'équation (E) ne sera en général pas holomorphe autour de $x=0$, $y=0$. Mais elle sera régulière autour de tout point $x=a$, $y=a$, a étant assez voisin de l'origine. Il est intéressant de se demander ce qu'elle devient si le point a tourne une fois autour de l'origine [1] : on pourra, après le mouvement, retrouver la solution dont on est parti, ou la même solution multipliée par une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité. Ces différents cas sont faciles à distinguer : la première équation (7) donne $\psi^{(q)}(x)$ sous la forme

$$x^{\frac{r'}{p'}}(a_0+a_1x+\ldots),$$

$\frac{r'}{p'}$ étant irréductible et p' un diviseur de p $(p=p'k)$. Il résulte des formules (7) que les p solutions de l'équation (E) se divisent en k systèmes de p' solutions se permutant entre elles dans le mouvement précédent.

L'étude complète de la singularité de $\psi(x, y)$ autour de $x=y=0$ est très compliquée ; elle est en effet étroitement liée à celle de la

(1) En d'autres termes, si l'on fait tourner simultanément les deux points x et y, maintenus très voisins, autour de l'origine.

singularité des fonctions permutables avec $f(x, y)$ autour de l'origine. Nous nous contenterons de montrer l'ordre des difficultés qui se présentent, dans un cas particulier où l'équation (E) peut se réduire directement à une équation intégrale, à laquelle s'applique la méthode d'approximations successives.

III. — Étude directe, dans un cas particulier, de l'équation (E).

10. C'est le cas particulier où l'équation est homogène en x et y. Prenons, pour fixer les idées, l'équation du second degré

$$(e) \qquad \int_x^y \psi(x, \xi)\psi(\xi, y)\,d\xi$$
$$= (y - x)[x^m + A_1 x^{m-1}(y - x) + \ldots + A_m(y - x)^m],$$

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ étant des coefficients constants. En recherchant sa solution sous la forme

$$\sum_0^\infty {}_i\,\psi^{(i)}(x)\frac{(y - x)^i}{i!},$$

on s'aperçoit [formules (7)] que la fonction $\psi^{(i)}(x)$ est homogène en x et de degré $\frac{m}{2} - i$. On est donc conduit à chercher directement $\psi(x, y)$ sous la forme

$$x^{\frac{m}{2}} u\left(\frac{y - x}{x}\right),$$

$u\left(\frac{y - x}{x}\right)$ étant une nouvelle fonction inconnue *d'une variable*. L'équation (e) s'écrit, en posant

$$\frac{y - x}{x} = t, \qquad \frac{\xi - x}{x} = \tau,$$

$$\int_0^t x^{\frac{m}{2}} u(\tau)\, x^{\frac{m}{2}}(1 + \tau)^{\frac{m}{2}} u\left(\frac{t - \tau}{1 + \tau}\right) x\,d\tau = (y - x)[x^m + A_1 x^{m-1}(y - x) + \ldots],$$

d'où

$$\int_0^t u(\tau)\, u\left(\frac{t - \tau}{1 + \tau}\right)(1 + \tau)^{\frac{m}{2}} d\tau = t(1 + A_1 t + \ldots + A_m t^m)$$

et, en dérivant une fois par rapport à t,

$$u(t)\,u(0)(1+t)^{\frac{m}{2}}+\int_0^t u(\tau)\,u'\left(\frac{t-\tau}{1+\tau}\right)(1+\tau)^{\frac{m}{2}-1}d\tau$$
$$=[1+2A_1t+\ldots+(m+1)A_m t^m].$$

On en conclut que $u(0)$ est égal à 1 et, en posant $\frac{t-\tau}{1+\tau}=\tau'$,

$$u(t)(1+t)^{\frac{m}{2}}+\int_0^t u\left(\frac{t-\tau'}{1+\tau'}\right)u'(\tau')\frac{(1+t)^{\frac{m}{2}}}{(1+\tau')^{\frac{m}{2}+1}}d\tau'=(1+2A_1t+\ldots),$$

d'où en divisant par $(1+t)^{\frac{m}{2}}$, puis en dérivant par rapport à t, l'équation intégrale

$$(8)\qquad u'(t)\left[1+(1+t)^{-\frac{m}{2}-1}\right]+\int_0^t u'\left(\frac{t-\tau}{1+\tau}\right)u'(\tau)\frac{d\tau}{(1+\tau)^{\frac{m}{2}+2}}=G(t),$$

propre à déterminer la dérivée $u'(t)$. La fonction

$$G(t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1+2A_1t+\ldots}{(1+t)^{\frac{m}{2}}}\right]$$

est une fonction connue.

11. L'équation (8) peut être traitée par approximations successives et il est aisé de montrer la convergence de ces approximations au voisinage de $t=0$; on en déduit la solution de l'équation (e) au voisinage de tout point $x=a$, $y=a$, a étant différent de zéro.

L'étude de la solution $\psi(x,y)$ au voisinage de $x=0$, $y=0$ nécessite au contraire la connaissance de la fonction $u'(t)$ pour toutes les valeurs de t. Cette dernière étude est difficile, car, s'il est très aisé d'étudier les singularités des diverses approximations successives, on n'est plus assuré, l'équation n'étant pas *linéaire*, que sa solution a pour seules singularités celles de ces approximations successives : on ne peut plus affirmer la convergence de la série des approximations successives, partout en dehors de leurs singularités; il y a même bien des chances pour que cette convergence n'ait pas lieu.

CHAPITRE IV.

NOUVELLE ÉTUDE DES FONCTIONS PERMUTABLES AVEC UNE FONCTION DONNÉE.

I. — But de ce Chapitre; un théorème sur les fonctions permutables.

1. J'ai été conduit aux résultats exposés dans ce Chapitre, en cherchant à répondre à diverses questions qui se posent à propos d'un résultat très simple, qui a joué son rôle au Chapitre I [1].

Rappelons d'abord ce résultat : soit $f(x, y)$ une fonction holomorphe dans un certain domaine, par exemple

$$(d) \qquad |x| \leqq R, \qquad |y| \leqq R,$$

où son module est borné par le nombre M. Soit la série

$$(1) \qquad a_0 f(x, y) + a_1 \overset{*}{f}{}^2(x, y) + \ldots + a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y) + \ldots;$$

les modules de ses différents termes sont respectivement inférieurs aux termes de la série

$$|a_0| M + |a_1| M^2 \frac{|y - x|}{1!} + \ldots + |a_n| M^{n+1} \frac{|y - x|^n}{n!} + \ldots,$$

de sorte que : *Si la série*

$$(2) \qquad a_0 + a_1 \frac{z}{1!} + \ldots + a_n \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

représente une fonction de z analytique autour de l'origine, la série (1) *convergera pour x et y situés dans le domaine* (d) *et de plus suffisamment voisins, et elle représentera une fonction $\varphi(x, y)$ permutable avec $f(x, y)$.*

2. A ce point, il est naturel de se poser les questions suivantes : réciproquement, peut-on obtenir toutes les fonctions permutables avec $f(x, y)$ par des séries telles que (1)? Si c'est impossible, quelles

---

[1] *Cf.* Chapitre I, nos 3 et 6.

sont les fonctions permutables avec $f(x, y)$ que l'on peut obtenir par des séries telles que (1)?

L'étude de ces questions est très simple dans un cas particulier qui pourra donner une idée du cas général : prenons $f(x, y) = 1$, il vient alors

$$\overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y) = \frac{(y-x)^n}{n!},$$

et les fonctions permutables avec $f(x, y)$ sont toutes les fonctions $\varphi(y-x)$. Celles de ces fonctions qui sont analytiques, et celles-là seulement, admettent des développements de la forme (1). Les autres peuvent, si elles sont continues, se représenter comme séries convergentes de polynomes symboliques

$$(3) \qquad \sum_{1}^{\infty}{}_n [\alpha_n^{(0)} f(x, y) + \alpha_n^{(1)} \overset{*}{f}{}^2(x, y) + \ldots + \alpha_n^{(p)} \overset{*}{f}{}^{p+1}(x, y)];$$

c'est le théorème même de Weierstrass sur le développement en série de polynomes d'une fonction continue.

L'étude des mêmes questions dans le cas général, étude faite dans ce Chapitre, nous conduira à une nouvelle manière de répondre à la question suivante :

Étant donnée une fonction $f(x, y)$ holomorphe autour de l'origine $(x = 0, y = 0)$, déterminer toutes les fonctions holomorphes autour de l'origine et permutables avec elle.

Elle nous fournira de plus des résultats importants et très simples sur les fonctions permutables avec une fonction $f(x, y)$ que nous supposerons, et ce sera essentiel, analytique.

Remarquons enfin que nous aurons ainsi, pour étudier les fonctions permutables, deux méthodes, celle du Chapitre II et celle-ci : si elles s'appliquent au même problème, ces deux méthodes s'y appliquent de façon suffisamment différente pour ne pas faire double emploi et pour mériter d'être étudiées toutes deux. Elles peuvent d'ailleurs se prêter un mutuel appui, comme nous en verrons un exemple au paragraphe III.

5. Voici, d'abord, un théorème sur les fonctions permutables qui nous servira par la suite.

Théorème. — *Si deux fonctions permutables $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ admettent respectivement en facteur exactement $(y-x)^a$ et $(y-x)^b$, et si l'on pose*

$$f(x, y) = (y-x)^a g(x, y),$$
$$\varphi(x, y) = (y-x)^b h(x, y),$$

on a

$$\frac{[h(x, x)]^{a+1}}{[g(x, x)]^{b+1}} = \text{const.}$$

Nous avons déjà démontré ce théorème comme conséquence de la recherche des fonctions permutables effectuée au Chapitre II. Ici nous procédons en sens inverse et sur le théorème précédent, démontré directement, nous baserons la recherche des fonctions permutables.

En voici la démonstration directe qui nécessite simplement l'existence et la continuité des premières dérivées de $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ (¹). On doit avoir

$$(4) \qquad \int_x^y f(x, \xi)\,\varphi(\xi, y)\,d\xi - \int_x^y \varphi(x, \xi) f(\xi, y)\,d\xi = 0,$$

d'où, en dérivant $p+1$ fois par rapport à y,

$$\sum_0^p {}_i \frac{\partial^i}{\partial y^i}[f(x, y)\,\varphi_{p-i}(y, y) - \varphi(x, y) f_{p-i}(y, y)]$$
$$+ \int_x^y [f(x, \xi)\,\varphi_{p+1}(\xi, y) - \varphi(x, \xi) f_{p+1}(\xi, y)]\,d\xi = 0,$$

avec les notations abrégées

$$\varphi_k(x, y) = \frac{\partial^k \varphi(x, y)}{\partial y^k}, \qquad f_k(x, y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(x, y),$$

d'où, en faisant $y = x$,

$$(5) \quad \sum_0^p {}_i \sum_0^i {}_s C_i^s \left\{ f_s(x, x) \frac{d^{i-s}}{dx^{i-s}}[\varphi_{p-i}(x, x)] - \varphi_s(x, x) \frac{d^{i-s}}{dx^{i-s}}[f_{p-i}(x, x)] \right\} = 0.$$

(¹) Cette démonstration est donc bien plus générale que celle du Chapitre II; nulle restriction relative à l'ordre ou à l'analyticité n'est nécessaire.

Dans le cas qui nous occupe, les fonctions

$$f(x,x),\quad f_1(x,x),\quad \ldots,\quad f_{a-1}(x,x),$$
$$\varphi(x,x),\quad \varphi_1(x,x),\quad \ldots,\quad \varphi_{b-1}(x,x)$$

sont identiquement nulles, tandis que

$$f_a(x,x),\quad \varphi_b(x,x)$$

ne sont pas identiquement nulles. Alors la première équation (5) qui ne soit pas vérifiée identiquement, correspond à $p = a + b + 1$ et s'écrit

$$(a+1) f_a(x,x) \frac{d}{dx} \varphi_b(x,x) - (b+1) \varphi_b(x,x) \frac{d}{dx} f_a(x,x) = 0,$$

d'où le résultat demandé

$$\frac{[\varphi_b(x,x)]^{a+1}}{[f_a(x,x)]^{b+1}} = \text{const.}$$

Si $a = b$ on en tire, λ étant une constante,

$$\varphi_a(x,x) - \lambda f_a(x,x) = 0.$$

et, si $b > a$, il suffira de prendre $\lambda = 0$ pour satisfaire à la même équation, d'où le corollaire suivant, d'un grand intérêt pour la suite :

$f(x,y)$ et $\varphi(x,y)$ étant des fonctions permutables telles que la première admette exactement, la seconde au moins, $(y-x)^a$ en facteur, on peut toujours trouver une constante λ et une seule telle que

$$\varphi(x,y) - \lambda f(x,y)$$

admette au moins $(y-x)^{a+1}$ en facteur.

II. — Les fonctions analytiques permutables avec une fonction analytique $f(x,y)$ telle que $f(x,x)$ ne soit pas identiquement nul.

4. Donnons d'abord une définition ; considérons un développement, convergent ou non, peu importe dans ce numéro, procédant suivant

les puissances positives de x et y. Soit

$$(6) \qquad \sum_{0}^{\infty}{}_p \sum_{0}^{\infty}{}_q c_{pq} x^p y^q;$$

nous le désignerons par la notation abrégée $f(x, y)$. Si on le compose avec lui-même 1, 2, ..., n fois, on obtient des développements analogues

$$\overset{*}{f}{}^2(x, y), \quad \overset{*}{f}{}^3(x, y), \quad \ldots, \quad \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y)$$

très bien définis. De plus, leur degré minimum total par rapport à x et à y va en croissant : si par exemple $f(x, y)$ commence par un terme constant, $\overset{*}{f}{}^2(x, y)$ commencera par des termes du premier degré, $\overset{*}{f}{}^3(x, y)$ par des termes du deuxième degré, etc. Soient alors

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

des nombres arbitraires, l'expression

$$(7) \qquad a_0 \overset{*}{f}(x, y) + a_1 \overset{*}{f}{}^2(x, y) + \ldots + a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y) + \ldots$$

représentera un développement analogue à (6), soit

$$(8) \qquad \sum_{0}^{\infty}{}_p \sum_{0}^{\infty}{}_q c_{p,q} x^p y^q.$$

Ceci résulte de ce que, d'après la remarque précédente, il n'entre dans le développement (7) qu'un nombre fini de termes d'un degré déterminé, de termes en $x^p y^q$ par exemple.

Donnons-nous inversement un développement (8); il pourra arriver qu'il se laisse mettre sous la forme (7). Si cela est, il sera bien facile de le reconnaître, du moins théoriquement, et les a_n seront déterminés de façon unique.

Définition. — *Nous dirons de toute série* (8) *qui se laisse mettre sous la forme* (7), *qu'elle est composée de* f.

3. Soit une fonction $f(x, y)$ holomorphe autour de $x = 0$, $y = 0$, et telle que $f(x, x)$ ne soit pas identiquement nul.

Nous allons déterminer, d'abord quant à leur forme, toutes les fonctions holomorphes autour de l'origine et permutables avec $f(x, y)$. En effet :

I. *Toute série des puissances de x et de y convergente autour de l'origine et composée de $f(x, y)$ représente une fonction $\varphi(x, y)$ répondant à la question.*

Car si $\varphi(x, y)$ est une telle série, de forme

$$a_0 f + a_1 \overset{*}{f}{}^2 + \ldots + a_n \overset{*}{f}{}^{n+1} + \ldots,$$

en écrivant que

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f},$$

on obtient certaines relations entre les $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, relations dont chacune ne contient, d'après une remarque précédente, qu'un nombre fini de ces $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$. Comme ces relations sont vérifiées identiquement quand les $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont en nombre fini non nuls, elles sont identiquement vérifiées.

II (Réciproque). *Toute série des puissances de x et de y, représentant une fonction $\varphi(x, y)$ holomorphe autour de l'origine et permutable avec $f(x, y)$, est composée de f.*

Appliquons en effet le corollaire du n° 5. Les fonctions $f(x, y)$, $\overset{*}{f}{}^2(x, y), \ldots, \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y), \ldots$ admettent respectivement en facteur $(y - x)^0, (y - x)^1, \ldots, (y - x)^n, \ldots$. On peut donc trouver un nombre a_0 tel que

$$\varphi(x, y) - a_0 f(x, y)$$

admette au moins $(y - x)$ en facteur, et généralement un nombre a_n tel que

$$\varphi(x, y) - a_0 f(x, y) - \ldots - a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y)$$

admette au moins $(y - x)^{n+1}$ en facteur. Mais alors cette différence n'a pas de terme en x et y de degré inférieur à $n + 1$. Il en est de même de la différence

$$\varphi(x, y) - \sum_0^\infty {}_p\, a_p \overset{*}{f}{}^{p+1}(x, y).$$

C'est dire que cette dernière différence est identiquement nulle, ou que $\varphi(x, y)$ est composée de $f(x, y)$.

Ainsi nous aurons toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec $f(x, y)$ en formant tous les développements

$$(7) \qquad \sum_{0}^{\infty}{}_{p}\, a_p \overset{*}{f}{}^{p+1}(x, y),$$

tels que la série

$$\sum\sum c_{pq} x^p y^q,$$

obtenue en ordonnant la série (7), converge autour de l'origine. Ceci n'entraîne pas *a priori* la convergence de la série (7). Nous allons voir que si, en cherchant quelle condition ceci entraîne pour a_0, $a_1, \ldots, a_n, \ldots$.

6. Nous nous restreindrons d'abord, dans cette étude, au cas où la fonction $f(x, y)$ est du *premier ordre*, et nous supposerons même que, par le changement de variable déjà envisagé au Chapitre II, on l'ait réduite sous une forme telle que

$$f(x, x) = 1.$$

Dans un certain domaine de l'origine, les fonctions $\dfrac{n!\,\overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y)}{(y-x)^n}$ seront holomorphes. C'est dire qu'elles admettront par exemple pour $|x| \leqq h$ et $|y - x| \leqq R$, des développements convergents (séries entières de $y - x$)

$$\frac{n!\,\overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y)}{(y-x)^n} = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_{p} (y-x)^p\, g_p^{(n)}(x),$$

les $g_p^{(n)}(x)$ étant des fonctions holomorphes de x pour $|x| \leqq h$.

Nous aurons besoin de développements majorant les précédents, c'est-à-dire de limites supérieures des

$$|g_p^{(n)}(x)|.$$

Soit d'abord

$$f(x, y) = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_{p} (y-x)^p\, g_p^{(0)}(x).$$

Nous pouvons toujours trouver ρ plus petit que R et tel qu'on ait,

pour $|x| \leqq h$,

$$|g_p^{(0)}(x)| < \frac{1}{\rho^p}.$$

Il est alors aisé de prouver le lemme suivant :

On peut trouver un nombre positif a tel que $2a < \rho$ et tel que dans le domaine

$$\text{(D)} \qquad |x| \leqq a, \qquad |y| \leqq a,$$

on ait

$$\text{(8)} \qquad \frac{n!\, \dot{f}^{n+1}(x, y)}{(y-x)^n} = 1 + \sum_1^\infty{}_p (y-x)^p \gamma_p^{(n)}(x, y),$$

$\gamma_p^{(n)}(x, y)$ *étant une fonction de x et y analytique dans* (D) *et telle que*

$$|\gamma_p^{(n)}(x, y)| < \frac{1}{\rho^p};$$

le développement (8) *étant, puisque $2a < \rho$, convergent dans* D.

Il suffit de prendre a assez petit pour que le développement précédemment écrit de $f(x, y)$ vérifie les conditions du lemme $\left(\text{donc } a < \frac{\rho}{2}\right.$ et $\left. a < h\right)$. Montrons en effet que si le lemme est vrai pour $\dot{f}^{n+1}(x, y)$ il est vrai pour $\dot{f}^{n+2}(x, y)$. Il vient

$$\dot{f}^{n+2}(x, y) = \int_x^y \left[\frac{(\xi - x)^n}{n!} \sum_0^\infty{}_p (\xi - x)^p \gamma_p^{(n)}(x, \xi)\right] \left[\sum_0^\infty{}_p (y - \xi)^p g_p^{(0)}(\xi)\right] d\xi;$$

les séries qu'on intègre étant absolument et uniformément convergentes, on en tire

$$\begin{aligned}
\dot{f}^{n+2}(x, y) &= \sum_0^\infty{}_p \sum_0^\infty{}_q \frac{1}{n!} \int_x^y (\xi - x)^{n+p} (y - \xi)^q \gamma_p^{(n)}(x, \xi)\, g_q^{(0)}(\xi)\, d\xi \\
&= \sum_0^\infty{}_p \sum_0^\infty{}_q \frac{(y-x)^{n+p+q+1}}{n!} \int_0^1 t^{n+p} (1-t)^q \\
&\quad \times \gamma_p^{(n)}[x, x + t(y-x)]\, g_q^{(0)}[x + t(y-x)]\, dt \\
&= \frac{(y-x)^{n+1}}{(n+1)!} \left\{ 1 + \sum_1^\infty{}_\pi (y-x)^\pi (n+1) \sum_{p+q=\pi} \int_0^1 t^{n+p} (1-t)^q \right. \\
&\qquad \left. \times \gamma_p^{(n)}[x, x + t(y-x)]\, g_q^{(0)}[x + t(y-x)]\, dt \right\}.
\end{aligned}$$

Reste à prouver que

$$\gamma_p^{(n+1)}(x,y) = (n+1)\sum_{i+j=p}^{\infty}\int_0^1 t^{n+i}(1-t)^j$$
$$\times\gamma_i^{(n)}[x, x+t(y-x)]g_j^{(0)}[x+t(y-x)]\,dt$$

est en module inférieur à $\frac{1}{\rho^p}$ dans le domaine D. Or

$$|\gamma_p^{(n+1)}(x,y)| < (n+1)\sum_{i+j=p}\frac{(n+i)!\,j!}{(n+i+j+1)!}\frac{1}{\rho^i}\frac{1}{\rho^j}$$
$$< \frac{n+1}{n+p+1}\frac{1}{\rho^p}\sum_{i+j=p}\frac{(n+i)!\,j!}{(n+p)!}.$$

Il faut prouver que

$$\frac{n+1}{n+p+1}\sum_{i+j=p}\frac{(n+i)!\,j!}{(n+p)!} < 1. \tag{9}$$

Si $n=0$ cette inégalité est vraie, car on a au premier membre la somme de $p+1$ quantités inférieures ou égales à 1 divisée par $p+1$. Si $n>1$, elle est aussi vérifiée car la somme $\sum_{i+j=p}$ contient un terme égal à 1 et p termes inférieurs ou égaux à $\frac{1}{p+n}$; le premier membre de (9) est donc inférieur à

$$\frac{n+1}{n+p+1}\left(1+\frac{p}{n+p}\right) = \frac{n+1}{n+p+1}\,\frac{n+2p}{n+p} < 1.$$

Le lemme est ainsi démontré.

On peut alors, dans un domaine

$$(\mathrm{D}')\qquad \begin{cases} |x| \leq \alpha, \\ |y-x| \leq \mathrm{R}_1, \end{cases}$$

avec $\alpha + \mathrm{R}_1 < a$, développer $\gamma_p^{(n)}(x,y)$ sous la forme

$$\gamma_p^{(n)}(x,y) = \sum_0^{\infty}{}_i (y-x)^i\gamma_{p,i}^{(n)}(x);$$

les $\gamma_{p,i}^{(n)}$ étant des fonctions de x analytiques dans (D′) et telles que

$$|\gamma_{p,i}^{(n)}(x)| < \frac{1}{\rho^p}\,\frac{1}{\mathrm{R}_1^i} < \frac{1}{\mathrm{R}_1^{i+p}}.$$

En ordonnant la série double ainsi obtenue suivant les puissances de $(y-x)$ on a un développement

$$\frac{n!\,\overset{*}{f}{}^{n+1}(x,y)}{(y-x)^n} = 1 + \sum_1^\infty{}_p\,(y-x)^p\,g_p^{n)}(x),$$

et il résulte des inégalités précédentes que, pour

$$|x| \leqq \alpha,$$

on a

$$|g_p^{n)}(x)| < \frac{p+1}{R_1^p} < \frac{1}{r^p},$$

r étant un nombre qu'il est facile d'assigner. Nous avons ainsi le résultat suivant :

On a

$$\frac{n!\,\overset{*}{f}{}^{n+1}(x,y)}{(y-x)^n} = 1 + \sum_1^\infty{}_p\,(y-x)^p\,g_p^{n)}(x),$$

il existe deux nombres r et α tels que pour

$$|x| \leqq \alpha$$

on ait

$$|g_p^{n)}(x)| < \frac{1}{r^p}.$$

7. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat suivant, qui vient compléter ceux du n° 5 :

Toute fonction $\varphi(x,y)$, permutable avec $f(x,y)$ et holomorphe autour de $x=0$, $y=0$, peut s'écrire

$$(10)\qquad \varphi(x,y) = a_0 f(x,y) + a_1 \overset{*}{f}{}^2(x,y) + \ldots + a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x,y) + \ldots,$$

les $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ étant arbitraires sous la seule restriction que la série

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

représente, autour de $z=0$, une fonction holomorphe de z. La série (10) est alors absolument convergente dans un certain domaine autour de $x=0$, $y=0$.

Faisons dans l'équation (10) $x = 0$, il vient

$$(11) \qquad \varphi(0, y) = \sum_{0}^{\infty}{}_p\, d_p y^p = \sum_{0}^{\infty}{}_n\, a_n \sum_{0}^{\infty}{}_i \frac{y^{n+i}}{n!} h_i^{(n)},$$

les d_p étant certains coefficients, les $h_i^{(n)}$ d'autres coefficients tels que

$$h_i^{(n)} = g_i^{(n)}(0).$$

Et, d'après le n° 5, la série du premier membre de (11) doit être identiquement égale à celle obtenue en ordonnant, suivant les puissances de y, le second membre de la même équation. Donc

$$d_p = \sum_{n+i=p} \frac{a_n}{n!} h_i^{(n)},$$

ou

$$d_p = \frac{a_p}{p!} + \sum_{1}^{p}{}_i \frac{a_{p-i}}{(p-i)!} h_i^{(p-i)}.$$

Nous pouvons toujours, en supposant r assez petit, admettre que

$$|d_p| \leqq \frac{M}{r^p};$$

nous avons aussi, d'après le numéro précédent,

$$|h_i^{(p-i)}| < \frac{1}{r^i}.$$

Les a_p sont donc en module inférieurs aux a'_p définis par les relations

$$(12) \qquad \frac{a'_p}{p!} = \frac{M}{r^p} + \sum_{1}^{p}{}_i \frac{a'_{p-i}}{(p-i)!} \frac{1}{r^i} \qquad (p = 0, 1, \ldots, \infty).$$

Mais des relations (12) on tire

$$a'_p = p! \frac{2^p M}{r^p}.$$

Il est clair alors que la série

$$\sum \frac{a_p z^p}{p!}$$

représentera autour de l'origine une fonction holomorphe de z.

Ainsi $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ choisis, comme nous devons le faire au n° **5**, de façon que la série double

$$\Sigma c_{pq} x^p y^q,$$

obtenue en ordonnant la série

$$\Sigma a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y),$$

représente $\varphi(x, y)$, sont de plus tels que cette série

$$\Sigma a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y)$$

converge absolument et uniformément et représente donc effectivement $\varphi(x, y)$. C'est le résultat annoncé. Il peut servir de réciproque au résultat énoncé au n° **1**, et, réunissant dans un même énoncé la proposition directe et la réciproque, on peut dire :

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *On obtiendra toutes les fonctions analytiques permutables avec $f(x, y)$ en formant tous les développements*

$$a_0 f(x, y) + a_1 \overset{*}{f}{}^2(x, y) + \ldots + a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y) + \ldots,$$

les $a_0, a_1, \ldots, a_n$ étant seulement tels que la série

$$\Sigma a_n \frac{z^n}{n!}$$

converge.

8. Indiquons enfin deux propositions qui ne sont pas essentiellement distinctes de la précédente et dont en tout cas la démonstration directe est très simple, après les considérations du n° **6**.

Si une série

$$\Sigma a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y) \tag{12}$$

est telle qu'en ordonnant ses termes par rapport aux puissances de x et de y on obtienne une série double $\Sigma_p \Sigma_q c_{pq} x^p y^q$ convergente, cette série (12) *est absolument et uniformément convergente.*

Si une série

$$\Sigma a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y) \tag{12}$$

est convergente en un point x_1, y_1 voisin de l'origine $x = 0, y = 0$,

les a_n sont tels que la série

$$\Sigma a_n \frac{z^n}{n!}$$

converge et la série (12) *converge pour tout le voisinage de* $x = 0$, $y = 0$.

9. Le résultat fondamental du n° **7** semble limité au cas d'une fonction $f(x, y)$ telle que

$$f(x, x) = 1. \tag{13}$$

Mais comme le changement de variable employé pour réaliser cette égalité (13) ne modifie pas les nombres a_n introduits au n° **5**, le *théorème* fondamental subsiste pour toute fonction holomorphe $f(x, y)$ autour d'un point $x = a$, $y = a$, où elle est du premier ordre.

La restriction de l'ordre est elle-même sans importance. Soit $f(x, y)$ homolorphe autour de $x = \alpha$, $y = \alpha$, quand le point du plan complexe α est intérieur à une aire A, et telle que $f(x, x)$ ne soit pas identiquement nul. Elle est du premier ordre, sauf autour des points de l'aire A qui vérifient l'équation

$$f(x, x) = 1.$$

Ce sont des points isolés. Soit alors une fonction $\varphi(x, y)$ permutable avec $f(x, y)$ et analytique autour d'un point $x = \alpha$, $y = \alpha$ intérieur à l'aire A. On pourra toujours supposer que α ne soit pas un zéro de $f(x, x)$. Mais alors on aura

$$\varphi(x, y) = \Sigma a_n f^{n+1}(x, y), \tag{13}$$

les a_n étant tels que

$$\Sigma a_n \frac{z^n}{n!}$$

converge. La série (13) converge donc et représente $\varphi(x, y)$ au voisinage de n'importe quel point $x = \beta$, $y = \beta$ intérieur à l'aire A, et même *au voisinage des zéros de* $f(x, x)$. C'est, *dans le cas particulier où* $f(x, x)$ *n'est pas identiquement nul, et dans ce cas seulement*, un complément important au résultat du Chapitre II (n° **12**) : *Toute*

fonction permutable avec $f(x, y)$ et holomorphe autour d'un point de la multiplicité $y = x$ est holomorphe autour de tous les points de cette multiplicité, y compris les zéros de $f(x, x)$.

On aurait pu faire l'étude des fonctions $\varphi(x, y)$ au voisinage d'un zéro de $f(x, x)$ par la méthode du Chapitre II, généralisée comme nous l'avons brièvement indiqué au Chapitre III (n° **2**) : on est alors conduit à définir les fonctions permutables par des approximations successives qui ont des singularités autour de ce zéro, alors que, d'après le résultat précédent, les fonctions permutables elles-mêmes n'en possèdent pas. *Ainsi, au moins dans ce cas, la méthode du Chapitre III* (n° **2**) *donne une idée très imparfaite et trop complexe de la nature analytique des fonctions permutables avec $f(x, y)$.* C'est pourquoi nous ne nous sommes pas attachés au développement de cette méthode.

10. Voici, enfin, des applications des considérations précédentes à la résolution d'équations intégrales des deux types envisagés précédemment, c'est-à-dire

$$\overset{*}{\psi}\overset{*}{\chi} = \overset{*}{\varphi} \tag{14}$$

et

$$\overset{*}{\chi}{}^n = \overset{*}{\omega}, \tag{15}$$

$\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\omega(x, y)$ étant des fonctions connues et $\chi(x, y)$ l'inconnue.

Imaginons que φ, ψ, ω soient holomorphes autour de $x = \alpha$, $y = \alpha$, α étant un point de l'aire (A) précédente et qu'ils soient permutables avec $f(x, y)$. On pourra les représenter, quand x et y seront voisins d'un point quelconque de l'aire (A) par les séries convergentes

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \overset{*}{f}{}^a(\alpha_0 + \alpha_1 \overset{*}{f} + \alpha_2 \overset{*}{f}{}^2 + \ldots), \\ \psi(x, y) &= \overset{*}{f}{}^b(\beta_0 + \beta_1 \overset{*}{f} + \beta_2 \overset{*}{f}{}^2 + \ldots), \\ \omega(x, y) &= \overset{*}{f}{}^c(\gamma_0 + \gamma_1 \overset{*}{f} + \gamma_2 \overset{*}{f}{}^2 + \ldots), \end{aligned} \tag{16}$$

avec [pour que (14) et (15) aient des solutions]

$$a > b \qquad \text{et} \qquad c \text{ multiple de } n.$$

On pourra donc représenter $\chi(x, y)$ par des développements du même type, eux aussi convergents au voisinage de tout point du domaine (A) :

ces développements étant obtenus, pour l'équation (14) par *quotient* des deux séries (16) et (17), pour l'équation (15) par l'*extraction d'une racine* $n^{\text{ième}}$ de la série (18).

Le résultat obtenu, bien fait pour mettre en évidence l'importance de la notion de permutabilité, peut s'énoncer ainsi :

Si les données d'une équation (14) *ou* (15) *sont analytiques et permutables avec une fonction* $f(x, y)$ *telle que* $f(x, x)$ *ne soit pas identiquement nul, la solution n'admet les points où* $f(x, x)$ *s'annule que comme singularités apparentes.*

Nous sommes en chacun de ces points dans les conditions étudiées au Chapitre I (n° **15**).

III. — Les fonctions non analytiques permutables avec $f(x, y)$ telle que $f(x, x)$ ne soit pas identiquement nul.

11. Nous utiliserons ici simultanément les méthodes du Chapitre II et celles du paragraphe précédent. Commençons par quelques remarques préliminaires : Supposons qu'autour de l'origine $f(x, x) = 1$ [1] et posons

$$f^{n+1}(0, y) = f_n(y).$$

Nous aurons

$$f_n(y) = \frac{y^n}{n!}\left(1 + \sum_1^\infty {}_p\, y^p h_p^n\right)$$

avec

$$|h_p^n| < \frac{1}{r^p}.$$

Remarquons d'autre part que nous avons démontré incidemment que :

Si $\varphi(y)$ *est une fonction holomorphe de* y *pour* $|y| \leqq r_0$, *on peut déterminer un nombre* r_1 *tel que* $\varphi(y)$ *soit développable dans le*

---

[1] Cette supposition n'ayant, comme précédemment, pas d'influence sur les résultats qui seront valables au voisinage de tout point $y = x$ autour duquel $f(x, y)$ est du premier ordre. La restriction de l'ordre est maintenant essentielle.

domaine $|y| \leqq r_1$ *en série absolument et uniformément convergente*

$$a_0 f_0(y) + a_1 f_1(y) + \ldots + a_n f_n(y) + \ldots. \tag{19}$$

Il faudra en effet déterminer les a_n par la condition déjà écrite (n° **7**)

$$\sum_0^\infty {}_p\, d_p x^p = \sum_0^\infty {}_n\, a_n \sum_0^\infty {}_i\, \frac{y^{n+i}}{n!} h_i^{(n)}.$$

Mais si $|\varphi(y)| < M$, nous avons

$$|d_p| < \frac{M}{r_0^p} < \frac{M}{r^p},$$

en diminuant r si c'est nécessaire. Les calculs du n° **7** donnent alors

$$|a_n| < n! \left(\frac{2}{r}\right)^n M$$

et permettent dès lors d'affirmer la convergence de la série (19) dans le domaine

$$|y| \leqq r_1 < \frac{r}{2}.$$

On peut alors prouver que :

Si $\varphi(y)$ *est une fonction de la variable réelle* y *continue pour* $-r_0 < y < +r_0$, *on peut trouver un nombre* r_1 *et des constantes* $a_p^{(n)}$ *tels que, dans le domaine* $-r_1 < y < +r_1$, *on ait*

$$\varphi(y) = \sum_0^\infty {}_n\, [a_0^{(n)} f_0(y) + \ldots + a_p^{(n)} f_p(y)],$$

cette série étant absolument et uniformément convergente.

Il suffit pour cela de prouver que l'on peut, par un polynome en $f_0(y)$, $f_1(y)$, ..., approcher de $\varphi(y)$ à moins de ε. C'est tout à fait immédiat. On peut tout d'abord trouver un polynome ordinaire en y, $\Psi(y)$, tel que

$$|\varphi(y) - \Psi(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour } -r_0 \leqq y \leqq +r_0.$$

Prenant alors r_1, nombre quelconque inférieur à $\frac{r}{2}$, on peut trouver,

d'après le résultat précédent, une suite

$$\sum_{0}^{p}{}_{n}\, a_n f_n(y)$$

telle que, pour $|y| \leqq r_1$, on ait

$$\left| \Phi(y) - \sum_{0}^{p}{}_{n}\, a_n f_n(y) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où, pour $-r_1 \leqq y \leqq +r_1$,

$$\left| \varphi(y) - \sum_{0}^{p}{}_{n}\, a_n f_n(y) \right| < \varepsilon. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

12. Il n'est plus difficile maintenant de démontrer le résultat essentiel que nous avons en vue dans ce paragraphe.

Théorème. — *Toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ des variables réelles x et y, définies et continues dans le voisinage de l'origine et y étant permutables avec $f(x, y)$, sont développables, dans le voisinage de l'origine, en série uniformément et absolument convergente de type*

$$(19) \quad \varphi(x, y) = \sum_{0}^{\infty}{}_{n} [a_0^{(n)} f(x, y) + a_1^{(n)} \overset{*}{f}{}^2(x, y) + \ldots + a_p^{(n)} \overset{*}{f}{}^{p+1}(x, y)].$$

En effet, d'après les résultats du Chapitre II (n° **6**), une fonction $\varphi(x, y)$ permutable avec $f(x, y)$ peut être caractérisée par ses valeurs

$$\varphi(0, y) = \varpi(y)$$

et est alors donnée par la formule

$$\varphi(x, y) = \varpi(y - x) + \int_0^{y-x} \varpi(\eta)\, \mathrm{L}(\eta \mid x, y)\, d\eta.$$

Tout revient donc à démontrer le développement (19) où l'on fait $x = 0$; mais c'est précisément ce que nous avons fait au numéro précédent.

13. Insistons sur la signification des résultats ainsi obtenus. Toutes les fonctions permutables avec l'unité sont de forme $\varphi(y-x)$, ce sont les fonctions d'une variable $y-x$. Toutes les fonctions permutables avec $f(x,y)$, fonctions dont l'ensemble dépend aussi d'une fonction arbitraire, peuvent être considérées comme généralisant les fonctions d'une variable. Les propriétés démontrées dans les deux paragraphes précédents ne font que généraliser les propriétés classiques des fonctions d'une variable :

Toute fonction analytique d'une variable est développable en série de Taylor.

Toute fonction continue d'une variable est développable en série de polynomes.

Il est aisé de poursuivre plus loin l'analogie : nous allons montrer que la théorie des polynomes de Tchebicheff s'étend sans difficultés.

14. Soient $f(x,y)$ et $\varphi(x,y)$ deux fonctions permutables des variables réelles x et y, définies et continues dans un domaine $\mathfrak{D}$, par exemple celui que nous avons couvert de hachures dans la figure

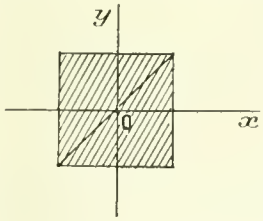


Fig. 5 *bis*.

ci-dessus. Essayons de représenter $f(x,y)$, dans ce domaine, par un polynome symbolique

$$A_0 f + A_1 \dot{f}^2 + \ldots + A_n \dot{f}^{n+1}$$

et formons la différence

$$y = \varphi - A_0 f - A_1 \dot{f}^2 - \ldots - A_n \dot{f}^{n+1}.$$

La fonction $|y|$, continue dans le domaine $\mathfrak{D}$, y atteindra au moins une fois son maximum m. Quand les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n$ vont varier, ce maximum sera une fonction

$$m(A_0, A_1, \ldots, A_n).$$

C'est une fonction continue, constamment positive si nous admettons, ce qui n'est pas une restriction, que φ ne coïncide pas avec l'une des fonctions

$$A_0 f + A_1 f^2 + \ldots + A_n f^n.$$

Cette fonction $m(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ aura donc une limite inférieure μ lorsque les nombres $A_0, A_1, \ldots, A_n$ prennent toutes les valeurs possibles.

Reste à prouver que cette limite inférieure est effectivement atteinte. Pour cela, nous remarquerons, comme dans la théorie ordinaire des polynomes de Tchebicheff [1], que l'on a

$$\mu \leqq m(0, 0, \ldots, 0) = \max |\varphi(x, y)| = M;$$

nous pouvons donc, sans modifier le minimum, nous restreindre aux polynomes pour lesquels on a

$$m \leqq M.$$

Mais ces polynomes sont tels que les modules de leurs coefficients soient bornés, car de

$$|\varphi(x, y) - A_0 f - A_1 f^2 - \ldots| < M,$$

on tire

$$|A_0 f + A_1 f^2 + \ldots| < 2M.$$

Cela suffira à prouver que $A_0, A_1, \ldots$ sont bornés supérieurement si l'on peut trouver $n+1$ systèmes de valeurs de x et de y

$$x_1 y_1, \quad x_2 y_2, \quad \ldots, \quad x_n y_n, \quad x_{n+1} y_{n+1}$$

tels que le déterminant

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_1^2 & \ldots & f_1^{n+1} \\ f_2 & f_2^2 & \ldots & f_2^{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n+1} & f_{n+1}^2 & \ldots & f_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix}$$

---

(1) *Cf.* Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions de variable réelle*, p. 82 et suiv.

ne soit pas nul. Les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n$ peuvent alors s'obtenir par résolution d'équations du premier degré à déterminant non nul et à second membre borné par la quantité $2M$; ils sont donc bornés.

Qu'il soit possible de trouver les $(n+1)$ systèmes de valeurs de x et de y, c'est une conséquence de la proposition immédiate suivante : il ne peut exister, quels que soient x et y, une relation de forme

$$M_0 f + M_1 f^2 + \ldots + M_n f^{n+1} = 0$$

sans que l'on ait

$$M_0 = M_1 = \ldots = M_n.$$

Le déterminant précédent peut en effet s'écrire

$$M_0 f_1 + M_1 f_1^2 + \ldots + M_n f_1^{n+1} = 0,$$

$M_0, M_1, \ldots, M_n$ étant des constantes en x_1 et y_1. S'il n'existe pas de système x_1, y_1 tel qu'il soit différent de zéro, c'est que M_0 en particulier sera nul. Mais c'est un déterminant de même type à une ligne de moins, etc.

Nous avons montré ainsi l'existence d'un polynome d'approximation. On voit comme les raisonnements suivent pas à pas ceux de la théorie ordinaire des polynomes de Tchebicheff.

IV. — Les fonctions permutables avec une fonction analytique $f(x, y)$ admettant $(y-x)^n$ en facteur.

13. Nous nous restreignons de nouveau dans ce Chapitre à la recherche des fonctions *analytiques* permutables avec $f(x, y)$.

Prenons donc une fonction $f(x, y)$ quelconque holomorphe quand x et y sont voisins d'un point a intérieur à un domaine ω du plan complexe. Elle pourra avoir en facteur une puissance quelconque de $(y-x)$: soit $(y-x)^n$. Nous venons de traiter le cas de $n=0$; si $n>0$, la première dérivée de f non identiquement nulle pour $y=x$ sera

$$\left[\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^n}\right]_{y=x} = \alpha(x);$$

c'est une fonction de x holomorphe dans ω et pouvant y avoir des

zéros isolés a, b, c, ... Résolvons alors l'équation

$$\dot{\psi}^{n+1}(x, y) = f(x, y), \tag{1}$$

ce que nous savons faire. Nous déterminons ainsi une fonction holomorphe au voisinage de tout point $x = y = \alpha$, α étant un point du domaine $\mathfrak{D}$ ne coïncidant pas avec a, b, c, ... Les fonctions permutables avec $f(x, y)$ seront les mêmes que les fonctions permutables avec $\psi(x, y)$. En effet, il est d'abord évident que toute fonction permutable avec $\psi(x, y)$ le sera avec $f(x, y)$; inversement, si

$$\dot{f}\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\dot{f} \qquad \text{ou} \qquad \dot{\psi}^{n+1}\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\dot{\psi}^{n+1}.$$

je dis que

$$\dot{\psi}\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\dot{\psi}.$$

En effet, posons

$$\dot{\psi}\dot{\varphi} - \dot{\varphi}\dot{\psi} = \dot{\chi}.$$

Il vient pour χ l'équation

$$\dot{\psi}^n\dot{\chi} + \dot{\psi}^{n-1}\dot{\chi}\dot{\psi} + \ldots + \dot{\chi}\dot{\psi}^n = 0, \tag{2}$$

d'où l'on conclut que χ est identiquement nul [*cf.* Chap. III (n° **6**), éq. (7)].

Mais $\psi(x, x)$ n'est pas identiquement nul. Nous pouvons donc appliquer à la recherche des fonctions permutables avec $\psi(x, y)$ les méthodes des paragraphes précédents et dire :

Toute fonction permutable avec $f(x, y)$ et holomorphe autour d'un point de la multiplicité $y = x$ est holomorphe autour de tout point de cette multiplicité, mis à part les zéros de la première dérivée de f non identiquement nulle pour $x = y$; elle est donnée par un développement

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, a_\nu \dot{\psi}^{\nu+1}(x, y),$$

les coefficients a_ν étant tels que la série

$$\Sigma\, a_\nu \frac{z^\nu}{\nu!}$$

converge.

Parmi les conséquences immédiates de cette forme des fonctions permutables, citons le théorème démontré par M. Vessiot (*cf.* Chap. II, n° 5) : « Deux fonctions permutables avec une même troisième sont permutables entre elles. » Mais nous supposons ici les fonctions analytiques.

16. Un cas important à caractériser sera celui où l'un des zéros, a par exemple, serait un point régulier pour toutes les fonctions permutables avec $f(x, y)$. Il sera pour cela *nécessaire et suffisant* que la solution $\psi(x, y)$ de l'équation (1) soit holomorphe autour de $x = y = a$. Nous savons (Chap. III, n° 8) reconnaître s'il en est ainsi.

La condition est en effet nécessaire puisque $\psi(x, y)$ est l'une particulière des fonctions cherchées, elle est suffisante d'après le résultat du n° 9 sur les fonctions permutables avec une fonction n'admettant pas $y - x$ en facteur.

17. Plaçons-nous dans le cas où cette circonstance ne se produit pas en a, a étant par exemple l'origine. Dans ce cas il existe des fonctions permutables avec $f(x, y)$ et non holomorphes autour de $x = y = 0$: que peut-on dire alors de celles des fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec $f(x, y)$ qui sont holomorphes à l'origine ? Cette question est bien dans l'ordre d'idées qui nous a occupé tout le long de ce travail.

Il est clair qu'il existe des fonctions $\varphi(x, y)$ holomorphes autour de $x = y = 0$; par exemple les fonctions

$$(3) \qquad a_0 f(x, y) + a_1 \dot{f}^2(x, y) + \ldots + a_n \dot{f}^{n+1}(x, y) + \ldots,$$

les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ étant tels que $\Sigma a_n \frac{z_n}{n!}$ converge. La formule (3) peut-elle inversement représenter toutes les fonctions permutables avec f et holomorphes autour de l'origine ? C'est la question que nous allons étudier et qui se rapproche de celle à laquelle nous avons consacré le début de ce Chapitre.

Dans le cas que nous allons étudier, l'équation

$$(1) \qquad \dot{\psi}^{n+1}(x, y) = f(x, y)$$

n'a pas de solution holomorphe autour de l'origine. Mais il pourra arriver qu'une autre équation

$$\psi^p(x, y) = f(x, y) \tag{4}$$

ait une solution holomorphe autour de l'origine. Nous remplacerons alors la fonction f par la fonction ψ. De sorte que, dans l'étude suivante, nous pourrons supposer, et c'est essentiel, que :

A. *Aucune équation telle que* (4) *n'a de solution holomorphe autour de* $x = y = 0$.

18. Cherchons alors à démontrer que

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de Taylor convergente

$$\Sigma c_{pq} x^p y^q$$

représente une fonction $\varphi(x, y)$ *permutable avec* $f(x, y)$ *est qu'elle soit composée de* $f(x, y)$.

Je crois ce résultat exact, sauf peut-être dans des cas très particuliers; j'indiquerai plus loin des cas étendus dans lesquels on peut le démontrer. Je vais prouver ici qu'il serait conséquence du résultat suivant, auquel il est d'ailleurs tout à fait équivalent :

B. *Toute équation en* $\psi(x, y)$

$$f_1 \psi(x, y) = F_1(x, y),$$

où $F_1(x, y)$ *et* $f_1(x, y)$ *sont des fonctions holomorphes autour de l'origine et permutables avec* $f(x, y)$, *admet, autour de l'origine, une solution holomorphe.*

Soit, en effet, $\varphi(x, y)$ une fonction régulière autour de $x = y = 0$ et permutable avec $f(x, y)$. Elle admet au moins $(y - x)^n$ en facteur. Si, en effet, elle admet seulement en facteur $(y - x)^p$ $(p < n)$, la résolution de l'équation

$$\varphi \psi = f$$

donnera une nouvelle fonction holomorphe $\psi(x, y)$ permutable avec

les précédentes et ayant en facteur $(y-x)^q$ $(q<n)$. D'où, si $p>q$ par exemple, une troisième fonction χ telle que

$$\dot{\psi}\dot{\chi}=\dot{\varphi}.$$

Toutes les fonctions ainsi obtenues sont, d'après l'hypothèse B, holomorphes; l'exposant de $(y-x)$ y va en décroissant. On pourra arriver ainsi à une fonction holomorphe permutable avec $f(x, y)$ et n'admettant plus $(y-x)$ en facteur, cela voudra dire (n° **10**) que l'équation

$$\dot{\varpi}^{n+1}(x, y)=\dot{f}$$

admet une solution holomorphe, ce qui contredit A. Ou bien le procédé s'arrêtera; il faudra alors qu'à un moment donné deux des fonctions, ψ et χ par exemple, aient en facteur la même puissance de $y-x$, soit $(y-x)^b$: alors on ne pourra pas écrire l'équation suivante. Mais il est aisé de voir alors que $n=ab+a-1$, a étant un entier, et de prouver qu'en vertu de l'hypothèse B l'équation

$$\dot{\varpi}^a=f$$

admettrait une solution holomorphe autour de l'origine; ce qui contredit encore l'hypothèse A.

La fonction $\varphi(x, y)$ admet donc au moins $(y-x)^n$ en facteur. Mais alors, d'après le corollaire du n° **5**, on peut trouver une constante a_0 telle que

$$\varphi(x, y)-a_0 f(x, y)$$

admette au moins $(y-x)^{n+1}$ en facteur. Cette nouvelle fonction admettra au moins $(y-x)^{2n+1}$ en facteur, sinon on en déduirait, par résolution de

$$\dot{f}\dot{\chi}=\dot{\Phi},$$

une fonction holomorphe permutable avec f et admettant moins de $(y-x)^n$ en facteur. On pourra donc trouver une nouvelle constante a_1 telle que

$$\varphi(x, y)-a_0 f(x, y)-a_1 \dot{f}^2(x, y)$$

admette en facteur au moins $(y-x)^{2n+2}$. Mais cette différence aura

alors au moins $(y-x)^{3n+2}$ en facteur et ainsi de suite. Le lecteur s'est déjà aperçu que la démonstration se développe toute parallèle à celle que nous avons donnée pour $n=0$, à cela près qu'il a fallu admettre la proposition B.

19. Il faut étudier cette proposition B. Je n'ai pu, ni démontrer en général que :

B'. *Toute équation*

$$\dot{f}_1\dot{\psi}=\dot{\varphi}_1,$$

telle que f_1 et φ_1 soient holomorphes autour de $x=y=0$ et permutables, a une solution holomorphe; ni donner des exemples du contraire. Je me contente de faire observer que la proposition B' serait une conséquence de la suivante :

C. *Une fonction analytique, permutable avec une fonction holomorphe autour de l'origine $x=y=0$ et qui admet, au voisinage de cette origine, les seules multiplicités de ramification $x=0$ et $y=0$, est tout à fait régulière autour de $x=y=0$.*

C entraîne bien B', car la solution $\dot{\psi}$ de l'équation $\dot{f}_1\dot{\psi}=\dot{F}_1$ admet, d'après les résultats du Chapitre I, les seules ramifications $x=0$ et $y=0$.

Or, si par les méthodes que j'ai rapidement indiquées au Chapitre III, on pousse, un peu plus que nous ne l'avons fait, l'étude de la singularité autour de $x=y=0$ des fonctions permutables avec $f(x,y)$, on se rendra compte que la proposition C est vraie, au moins en général.

20. Laissant de côté la démonstration de B', nous allons considérer un cas étendu où cette proposition est vraie, et où l'on peut affirmer, par conséquent, le théorème de la page 90.

Considérons la dérivée

$$\left[\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n}\right]_{y=x}=f_n(x,x),$$

elle admet un développement de forme

$$x^p(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots),$$

p étant un entier positif. Le cas où p est nul a été étudié déjà et n'offre pas de difficultés. Nous allons démontrer le théorème de la page 90 dans le cas où p et $n+1$ sont premiers entre eux : nous montrerons en effet que dans ces conditions une fonction holomorphe permutable avec $f(x, y)$ doit admettre en facteur $(y - x)$ à une puissance égale à un multiple de $n+1$ moins 1 ; et c'est là la conséquence de la proposition B qui nous a servi à prouver le théorème de la page 90.

Soit, en effet, $\varphi(x, y)$ permutable avec $f(x, y)$, admettant en facteur $(y - x)^{n'}$ et telle que

$$\left[\frac{\partial^{n'} \varphi(x, y)}{\partial y^{n'}}\right]_{y=x} = \varphi_{n'}(x, x) = x^{p'}(\beta_0 + \beta_1 x + \ldots).$$

on doit avoir (*cf.* n° 5)

$$\frac{[\varphi_{n'}(x, x)]^{n+1}}{[f_n(x, x)]^{n'+1}} = \text{const.},$$

d'où

$$p'(n+1) = p(n'+1),$$

et, comme p et $n+1$ sont premiers entre eux, on en tire

$$(n'+1) = \lambda(n+1).$$

λ étant entier. C'est le résultat annoncé.

Sans qu'il soit besoin d'insister, on voit qu'on pourra démontrer le théorème de la page 90 dans des cas de plus en plus étendus.

21. Lorsque le théorème de la page 90 est vrai, toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ holomorphes autour de $x = 0$, $y = 0$ et permutables avec $f(x, y)$ s'obtiennent en prenant tous les développements

$$a_0 f + a_1 \overset{*}{f}{}^2 + a_2 \overset{*}{f}{}^3 + \ldots + a_n \overset{*}{f}{}^{n+1} + \ldots,$$

les constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ étant arbitraires sous la seule restriction

que la série

$$\Sigma\, c_{pq} x^p y^q$$

converge. Précisons la condition ainsi imposée à ces constantes.

Soit $\psi(x, y)$ la fonction, non régulière autour de l'origine, telle que

$$\psi^{n+1}(x, y) = f(x, y).$$

Autour d'un point $x = y = \alpha$, distinct de l'origine, mais voisin, on a

$$\varphi(x, y) = \Sigma\, \alpha_\nu \psi^{\nu+1}(x, y),$$

la série

$$\sum \frac{\alpha_\nu z^\nu}{\nu!}$$

convergeant. Mais nécessairement

$$a_p = \alpha_{pn+p+n},$$

de sorte que ces a_p doivent être tels que la série

$$(1) \qquad \sum \frac{a_p z^{pn+p+n}}{(pn+p+n)!} \quad \text{ou} \quad \sum \frac{a_p z^p}{(pn+p+n)!}$$

converge. Cette condition est d'ailleurs la condition nécessaire et suffisante imposée aux a_p : je dis en effet qu'elle entraîne la convergence absolue et uniforme, autour de $x = y = 0$, de la série

$$(2) \qquad \Sigma\, a_p f^{p+1}(x, y).$$

Faisons en effet varier x et y dans le domaine suivant : ils sont tous

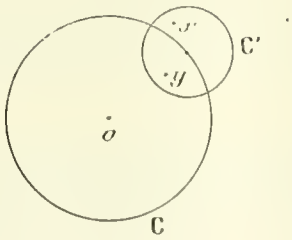


Fig. 5 *ter*.

deux intérieurs à un petit cercle C′ de rayon ρ dont le centre décrit un cercle C de centre l'origine et de rayon r. Dans un tel domaine,

si le rayon ρ est assez petit, la série (2) converge, car ses termes sont en modules inférieurs à ceux de la série

$$\Sigma |a_p| \frac{|y-x|^{pn+p+n}}{(pn+p+n)!} N^{pn+p+n+1},$$

N étant un maximum de $\psi(x, y)$. Or, on peut écrire la série (2)

$$(2') \qquad \sum_0^\infty {}_p (y-x)^{pn+p+n} \Pi_p(x, y),$$

$\Pi_p(x, y)$ étant holomorphe quand x et y sont voisins de zéro; $\Pi_p(x, y)$ est, lorsque x et y restent dans le domaine précédent, limité par $\frac{1}{R^p}$, R étant un nombre bien choisi. Il est alors facile de trouver un développement majorant $\Pi_p(x, y)$ au voisinage de l'origine; car si x est le centre du cercle C', on a

$$\Pi_p(x, y) = \Sigma (y-x)^q \Pi_{p,q}(x),$$

$\Pi_{p,q}(x)$ étant une fonction de x régulière dans et sur le cercle C et inférieure à $\frac{1}{R^p \rho^q}$ puisque le développement précédent converge dans et sur C'. La fonction $\Pi_{pq}(x)$ est donc majorée dans C par

$$\frac{1}{R^p \rho^q \left(1 - \frac{x}{r}\right)}$$

et $\Pi_p(x, y)$ par

$$\frac{1}{R^p} \frac{1}{\left(1 - \frac{y+x}{\rho}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right)}.$$

Il n'en faut pas plus pour affirmer la convergence absolue et uniforme autour de l'origine de (2') ou de (2).

22. Une remarque pour terminer. Nous avons été amené, dans ce qui précède, à étudier la convergence des séries

$$\Sigma a_n f^{n+1}(x, y)$$

généralisant, dans notre théorie, les séries de puissances d'une variable.

Il n'est pas plus difficile d'étudier la convergence des séries généralisant, dans notre théorie, les séries des puissances de plusieurs variables : cette étude conduira à déterminer les hypothèses *les plus générales* qu'on puisse faire sur les coefficients d'une série déterminant une équation intégrale du type (a') envisagé au Chapitre I (p. 10), pour que cette équation intégrale ait un sens. Ces hypothèses sont à peu près celles que nous avons faites au n° **6** de ce Chapitre; en tout cas, la méthode de M. Volterra donnée au Chapitre I s'appliquera toujours.

V. — Conclusion.

23. Toutes les équations étudiées précédemment rentrent dans la classe générale des équations qu'on peut former à partir de fonctions inconnues et de fonctions connues par des additions et des compositions. Nous avons développé, pour leur résolution, deux méthodes principales : la première consiste à les réduire à une équation résoluble par approximations successives, cette réduction étant toute réalisée (Chap. I, équations des paragraphes I et II) ou s'obtenant par dérivation [équation de Volterra de première espèce, équation (e) du Chapitre III] et par changement d'inconnue (Chap. II). La seconde méthode consiste à rechercher la solution sous la forme

$$\Sigma (y-x)^p \Pi_p(x).$$

Les méthodes de ce Chapitre appartiennent à ce second type.

24. Ces deux catégories de méthodes s'appliquent à toute équation de la classe précédente : c'est ainsi que M. Volterra a appliqué les méthodes du Chapitre II aux équations

$$\overset{+}{f}_1 \overset{+}{\varphi} - \overset{+}{\varphi} \overset{+}{f}_2 = \overset{+}{F},$$

$\overset{+}{\varphi}$ étant inconnue, f_1 et f_2 deux fonctions connues du premier ordre, F une fonction connue d'ordre supérieur [1]. Cette équation admet

[1] Cours fait à l'Université de Rome en 1912-1913. Il serait aisé, après les développements du Chapitre II, de passer à des cas plus généraux.

une seule solution lorsque

$$f_1(x, x) \neq f_2(x, x);$$

elle admet (comme l'équation $\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}$) une infinité de solutions dépendant d'une fonction arbitraire si $f_1(x, x) = f_2(x, x)$. Cet exemple aidera à comprendre que les deux équations principales

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{F}, \tag{1}$$

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} - \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f} = 0 \tag{2}$$

sont respectivement types de deux grandes catégories d'équations de la classe précédente : la solution des équations de la première catégorie étant déterminée, celle des autres dépendent de fonctions arbitraires. La distinction des deux classes est très aisée si l'on emploie la deuxième méthode rappelée au n° **22** : les équations du type (1) étant telles que, pour déterminer les $\Pi_p(x)$ successifs, on ait à résoudre des équations algébriques, les équations du type (2) telles que pour déterminer les $\Pi_p(x)$ on ait à résoudre des équations différentielles.

Remarquons enfin que la multiplicité $y = x$ jouera, pour les équations de cette classe les plus générales, le même rôle essentiel que pour les équations particulières que nous avons étudiées : les solutions de ces équations y seront régulières, sauf en des points fixes jouant le rôle des points où $f(x, y)$ cesse d'être d'un ordre déterminé.

Note sur le problème général de l'Électrodynamique;

PAR PIERRE DUHEM.

Deux erreurs se sont glissées dans notre Mémoire intitulé : *Le problème général de l'Électrodynamique pour un système de corps immobiles* (¹). L'une est une inadvertance qui ne change aucune conclusion; l'autre, au contraire, exige que deux de nos conclusions soient restreintes au cas où le système ne contient qu'un seul corps homogène.

La première de ces erreurs consiste dans l'oubli du facteur $\frac{a}{\sqrt{2}}$ au second membre de l'égalité (30) et de celle qui la précède immédiatement; il en résulte que, dans toutes les équations qui, au Chapitre II, viennent après celle-là, et dans nombre d'équations des Chapitres IV et V, on doit remplacer le facteur $a\sqrt{2}$ par le facteur a^2. Cette correction, nous le répétons, n'altère aucune des propositions que nous avons énoncées.

La seconde erreur s'est introduite dans l'établissement de l'égalité (47). Pour que cette égalité pût se tirer de celle qui la précède, dans le cas où le système est formé de plusieurs corps séparément homogènes, il faudrait que, à la surface de séparation de deux tels corps, $\frac{\partial U}{\partial t}$ demeurât continu; or c'est ce qui n'a pas lieu. L'égalité (35) donne, en effet,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}.$$

De même que la fonction potentielle W, les quantités $\frac{\partial W}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ demeurent continues à la traversée de la surface considérée; mais il n'en est pas de même de ρ et de K', en sorte qu'en général cette surface est, pour $\frac{\partial U}{\partial t}$, une surface de discontinuité.

(¹) *Journal de Mathématiques*, 6e série, t. X, 1914, pp. 347 et suiv.

L'égalité (47) doit donc être restreinte au cas où le système renferme un seul corps homogène; partant, il en est de même des conséquences qu'on en déduit, au n° **17** et au n° **19**, touchant la détermination de la fonction W et touchant la stabilité de l'équilibre électrostatique.

Touchant la stabilité de l'équilibre électrostatique, nous n'avons pas trouvé, jusqu'ici, de moyen propre à lever cette restriction; mais la démonstration suivante nous paraît la pouvoir lever en ce qui concerne l'absence d'ambiguïté dans la détermination de la fonction W.

Écrivons l'équation (36), en tenant compte de la définition (35) de la fonction U et de la correction indiquée au début de la présente Note; elle deviendra

$$(139)\qquad \Delta\left(D'\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}W\right)-2\pi a^2 k\left(K'\frac{\partial^3 W}{\partial t^3}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)=0.$$

Multiplions-la par $\frac{\partial W}{\partial t}\,d\varpi$, et intégrons le résultat pour le volume entier du système; nous trouvons

$$(140)\qquad \int\frac{\partial W}{\partial t}\Delta\left(D'\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}W\right)d\varpi$$
$$-2\pi a^2 k\int K'\frac{\partial W}{\partial t}\frac{\partial^3 W}{\partial t^3}\,d\varpi-\pi a^2 k\frac{d}{dt}\int\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi=0.$$

Si S_{12} est la surface de contact de deux corps distincts, 1 et 2, et Σ la surface terminale du système, on a, *en remarquant que* $\frac{\partial W}{\partial t}$ *est continu au travers de la surface* S_{12},

$$(141)\qquad \int\frac{\partial W}{\partial t}\Delta\left(D'\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}W\right)d\varpi$$
$$=-\int\left(D'\frac{\partial}{\partial N}\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial W}{\partial N}\right)\frac{\partial W}{\partial t}\,d\Sigma$$
$$-\int\left(D'_1\frac{\partial}{\partial n_1}\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_1}\frac{\partial W}{\partial n_2}+D'_2\frac{\partial}{\partial n_2}\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_2}\frac{\partial W}{\partial n_2}\right)\frac{\partial W}{\partial t}\,dS_{12}$$
$$-\int D'\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi$$
$$-2\pi\varepsilon'\frac{d}{dt}\int\frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi.$$

Mais, en tout point de la surface S_{12}, l'égalité (37) peut s'écrire :

$$(142)\qquad D'_1 \frac{\partial}{\partial n_1}\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_1}\frac{\partial W}{\partial n_1} = D'_2 \frac{\partial}{\partial n_2}\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_2}\frac{\partial W}{\partial n_2}.$$

Si nous posons

$$(143)\quad H = \int \frac{1}{\rho}\left\{2\pi\varepsilon'\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] + \pi a^2 k\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2\right\} d\varpi,$$

$$(144)\qquad J = \int D'\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right] d\varpi,$$

les égalités (140), (141) et (142) nous permettront d'écrire :

$$(145)\quad 2\pi a^2 k\int K'\frac{\partial W}{\partial t}\frac{\partial^3 W}{\partial t^3}\,d\varpi = -J - \frac{dH}{dt} - \int\left(D'\frac{\partial}{\partial N}\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial N}\right)\frac{\partial W}{\partial t}\,d\Sigma.$$

Supposons qu'on donne :

1° A tout instant, en tout point de la surface Σ, soit W, soit $\frac{\partial W}{\partial N}$;

2° A l'instant initial, en tout point du système, W, $\frac{\partial W}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$.

Demandons-nous si W est alors déterminé sans ambiguïté.

Supposons qu'on en puisse donner deux déterminations distinctes, W′, W″, et posons

$$(146)\qquad W = W'' - W'.$$

W vérifiera encore l'égalité (145). Mais alors, on aura :

1° A l'instant initial, en tout point du système,

$$(147)\qquad W = 0,\qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 0,\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0;$$

2° A tout instant, en tout point de la surface Σ,

$$(148)\qquad \text{soit}\quad W = 0,\qquad \text{soit}\quad \frac{\partial W}{\partial N} = 0.$$

En vertu de ces égalités (148), l'égalité (145) deviendra

$$(149)\qquad 2\pi a^2 k\int K'\frac{\partial W}{\partial t}\frac{\partial^3 W}{\partial t^3}\,d\varpi = -J - \frac{dH}{dt}.$$

En chaque point du système, on peut écrire, en vertu des égalités (147) et de la formule de Mac Laurin,

$$\frac{\partial W(t)}{\partial t} = \frac{t^2}{2}\frac{\partial^3 W(\theta)}{\partial \theta^3},$$

θ étant un instant compris entre o et t, instant qui peut, d'ailleurs, varier d'un point à l'autre du système.

L'égalité (149) devient donc

$$(150) \qquad \pi a^2 k t^2 \int K' \frac{\partial^3 W(\theta)}{\partial \theta^3}\frac{\partial^3 W(t)}{\partial t^3} d\varpi = -J - \frac{dH}{dt}.$$

Nous allons maintenant soumettre W *à la* RESTRICTION *suivante :*

On peut déterminer une valeur assez petite de τ, *pour qu'entre* $t = 0$ *et* $t = \tau$, $\frac{\partial^3 W(t)}{\partial t^3}$ *n'éprouve de changement de signe en aucun point du système.*

En un point donné, mais quelconque, du système, entre l'instant o et l'instant t, toutes les valeurs de $\frac{\partial^3 W}{\partial t^3}$ qui ne sont pas nulles, sont de même signe; ce signe peut, d'ailleurs, changer d'un point à l'autre du système.

Considérons un instant t compris entre o et τ; θ est aussi compris entre o et τ; si donc les quantités $\frac{\partial^3 W(\theta)}{\partial \theta^3}$, $\frac{\partial^3 W(t)}{\partial t^3}$ sont, toutes deux, différentes de o, elles sont de même signe. A un tel instant t, le premier membre de l'égalité (150) est assurément nul ou positif.

D'après l'égalité (144), J ne peut être que nul ou positif.

Il en est de même de H, d'après l'égalité (143). Cette égalité, jointe aux égalités (147), montre, d'ailleurs, que H est nul à l'instant initial; si cette quantité n'est pas constamment nulle, elle commence par croître; on peut donc trouver une valeur assez petite de τ' pour que, entre $t = 0$ et $t = \tau'$, $\frac{dH}{dt}$ soit constamment nul ou positif. Ainsi, à tout instant compris entre $t = 0$ et $t = \tau'$, le second membre de l'égalité (150) est nul ou négatif.

Soit T la plus petite des deux quantités τ et τ'. A tout instant

compris entre $t = 0$ et $t = T$, le premier membre de l'égalité (150) est nul ou positif et le second est nul ou négatif; l'égalité (150) ne peut donc être vraie, à moins que ses deux membres ne demeurent constamment nuls entre $t = 0$ et $t = T$.

Pour cela, il faut, en particulier, que J demeure constamment nul durant ce laps de temps, ce qui exige, en vertu de l'égalité (144),

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial z\, \partial t} = 0.$$

Mais $\frac{\partial W}{\partial t}$ est supposé continu dans toute l'étendue du système; ces égalités exigent donc qu'à un même instant quelconque, compris entre $t = 0$ et $t = T$, $\frac{\partial W}{\partial t}$ ait même valeur dans tout le système. Or, sur la surface Σ, en vertu des égalités (148), W et, par conséquent, $\frac{\partial W}{\partial t}$ sont constamment nuls. Partant, en tout point du système et à tout instant compris entre $t = 0$ et $t = T$, on a

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0.$$

W est, en chaque point, indépendant du temps, et donc nul, puisque, d'après les égalités (147), sa valeur initiale est 0.

On peut ainsi trouver une durée finie T telle que les deux solutions W′ et W″ demeurent identiques entre elles entre $t = 0$ et $t = T$. Mais, en reprenant le même raisonnement à partir de $t = T$, on trouvera qu'elles demeurent identiques entre elles jusqu'à $t = 2T$, et ainsi de suite; elles ne peuvent donc jamais différer l'une de l'autre.

Sur la démonstration donnée au n° **17** de notre Mémoire : *Le problème fondamental de l'Électrodynamique*, cette démonstration présente un avantage; elle n'est pas bornée au cas d'un corps homogène unique; mais elle a l'inconvénient de soumettre les propriétés de $\frac{\partial^3 W}{\partial t^3}$ à une restriction que, peut-être, certaines intégrales ne vérifieraient pas.

Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues;

PAR ARNAUD DENJOY.

L'objet du présent Mémoire est l'étude des nombres dérivés des fonctions continues les plus générales. La conclusion essentielle de cet Ouvrage est que, si l'on néglige un ensemble de mesure certainement nulle, en un point quelconque, les dérivés extrêmes d'une même fonction continue se groupent suivant l'un des quatre modes suivants : 1° les dérivés extrêmes sont $+\infty$ et $-\infty$ pour chaque côté; 2° le dérivé supérieur droit est $+\infty$, le dérivé inférieur gauche est $-\infty$, les deux autres dérivés extrêmes étant finis et ÉGAUX; 3° il existe une dérivée bilatérale finie; 4° les nombres dérivés extrêmes ont les mêmes valeurs qu'au second cas, les côtés étant échangés.

Ces quatre types d'associations peuvent être réalisés sur des ensembles doués séparément ou simultanément de mesures positives dans tout intervalle [1].

[1] Ce Mémoire est la première partie d'un travail beaucoup plus vaste « *sur la dérivation et son calcul inverse* ». Le Mémoire complet, étant trop étendu pour paraître en un seul recueil, a été scindé en plusieurs fragments. Le premier paraît ci-après, et je remercie la rédaction du présent journal d'avoir bien voulu l'accepter. J'en ai donné l'analyse dans trois Notes des *Comptes rendus* (31 mai, 14 juin et 9 août 1915; *voir* également 1er et 22 avril 1912).

En vue d'éviter à mon lecteur des recherches auxiliaires dans d'autres Ouvrages, j'ai pris soin d'expliquer, au fur et à mesure des besoins logiques, tous les résultats cités dans ma rédaction sans être absolument classiques. Néanmoins une lecture essentielle préliminaire à ce Mémoire est celle des *Leçons sur l'Intégration*, publiées par M. Lebesgue dans la collection Borel. A cause de la fréquence des références empruntées à ce livre, je le désignerai toujours ci-après par les seules initiales *L. I.* Je ne saurais également trop recommander au lecteur l'étude préalable des *Leçons sur les fonctions discontinues* de M. Baire, parues dans la même collection.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS ET LES ENSEMBLES [1].

Notions d'ordre descriptif.

1. Commençons par rappeler ou spécifier le sens figuré donné à un certain nombre de termes dans la théorie qui va nous occuper. Les locutions « appartenir à un ensemble », « être contenu dans lui », et, de préférence, lui « être agrégé » sont synonymes. Il en est de même entre elles pour les expressions « ne pas appartenir », ou « être étranger » à un ensemble. Le sujet du verbe désigne un point ou un autre ensemble. Au lieu d' « ensemble », nous dirons parfois « agrégat ».

2. Nous désignerons par une même lettre, ou un même chiffre, un nombre et le point figurant celui-ci sur un axe indéfini où ont été fixés les points 0 et $+1$. Soient a et b deux nombres inégaux ou points distincts. En règle générale, quand nous énoncerons un couple de nombres désignés par des lettres, le premier sera toujours le plus petit.

3. La précision du langage nous oblige à distinguer par des expressions particulières les divers cas où un nombre x, ni inférieur à a, ni supérieur à b, est, ou bien obligatoirement compris entre eux, ou bien susceptible également de coïncider avec l'un d'eux. M. Borel exprime la première éventualité, définie par la double inégalité :

$$a < x < b, \tag{1}$$

en disant que x *appartient* (*sens étroit*) à l'intervalle ab; il traduit la seconde définie par

$$a \leqq x \leqq b, \tag{2}$$

---

[1] *Voir*, pour les définitions contenues dans ce Chapitre, une Note des *Comptes rendus*, 31 mai 1915.

en disant que x *appartient* (*sens large*) à l'intervalle ab. Il sera peut-être plus concis et non moins clair de poser les définitions suivantes. Le premier ensemble, déterminé par les inégalités (1), sera appelé l'*intervalle* ab. Le second ensemble, défini par (2), sera nommé le *segment* ab. Nous distinguons donc intervalle et segment dans l'espace linéaire, comme, dans l'espace à n dimensions, on distingue les continuums et les domaines. Au sens ainsi précisé, *un intervalle n'a que des points intérieurs*, si l'on convient de dire qu'un point est intérieur à un ensemble E s'il n'est entouré que de points de l'ensemble ou encore s'il n'est pas limite de points étrangers à l'ensemble. Pareillement *tout point étranger à un segment lui est extérieur*, en entendant par point extérieur à un ensemble un point situé dans un intervalle dont tous les points sont étrangers à l'ensemble. Nous dirons encore qu'un ensemble E′ est intérieur à un ensemble E si tous les points de E′ sont intérieurs à E. Tous les points d'un intervalle lui étant intérieurs, tout ensemble agrégé à lui lui est intérieur. Un intervalle est intérieur à lui-même.

a et b sont étrangers à leur propre intervalle. Nous les appellerons *extrémités* de leur intervalle, mais non pas « points extrêmes », car ni a ni b ne sont des points de l'intervalle ab. Au contraire, a et b sont agrégés au segment ab et en seront indifféremment appelés les *points extrêmes* ou les *extrémités*. Les ensembles

$$a \leqq x < b, \tag{3}$$

$$a < x \leqq b \tag{4}$$

seront appelés indifféremment : le premier « intervalle ab accru de a » ou « segment ab diminué de b », le second « intervalle ab accru de b » ou « segment ab diminué de a ».

Il est équivalent de dire qu'un point, un ensemble sont intérieurs à un segment ab ou qu'ils sont agrégés à l'intervalle ab. Si un segment σ ou $\alpha\beta$ est agrégé à un intervalle ab, c'est-à-dire si tous les points de σ sont agrégés à l'intervalle ab, $\alpha - a$ et $b - \beta$ sont toujours positifs, jamais nuls. Au contraire, un intervalle i agrégé à un segment s peut parfaitement avoir les mêmes extrémités que lui. Si un segment σ est agrégé à un segment s, ils peuvent avoir des extrémités communes et même coïncider. Il en est de même pour deux intervalles dont l'un

est agrégé à l'autre. Il suffit de se reporter aux inégalités (1) pour voir que, si deux points sont agrégés à un même intervalle, le segment les joignant est lui aussi agrégé à cet intervalle.

Si deux intervalles ab, $a'b'$ ont en commun un point α, si c est le plus grand des nombres a, a', l'un et l'autre inférieurs à α, si d est le plus petit des nombres b, b' l'un et l'autre supérieurs à α, les deux intervalles ab, $a'b'$ ont en commun tout l'intervalle cd et nul point étranger à lui. Au contraire, deux segments peuvent avoir en commun un seul point, extrémité de l'un et de l'autre.

4. Nous rappellerons en langage bref le sens de certains adjectifs dont on qualifie les ensembles : *fermé* = contenant tous ses points limites; *dense en lui-même* = admettant chacun de ses points pour points limites; *parfait* = fermé et dense en lui-même; *réductible* = dont le dérivé est dénombrable, ou dont un dérivé d'un certain ordre fini ou transfini est nul; « complémentaires l'un de l'autre relativement à un ensemble P » se dit de deux ensembles agrégés à P, ne possédant pas de points communs et reproduisant P par leur réunion.

5. Un ensemble fermé est *dense* sur un segment s quand il contient entièrement un segment agrégé à s. Donc un ensemble fermé est non dense sur s si, dans tout segment agrégé à s, il existe des points étrangers à E, donc des intervalles étrangers à E. Un ensemble fermé est dit *partout dense* sur s s'il coïncide avec s. Un ensemble non fermé est dit, en même temps que son dérivé, *dense*, *non dense* ou *partout dense* sur un segment (ou un intervalle). Si donc l'ensemble H est partout dense sur ab (segment ou intervalle), dans tout intervalle intérieur à ab, H a au moins un point. Si H est non dense sur ab, tout intervalle situé dans ab en contient un autre où H n'a pas de points. Si H est dense sur ab, il y a un segment de ab où H est partout dense [1].

---

[1] M. de la Vallée-Poussin (*Cours d'Analyse*, 3e édition, p. 54) paraît donner une acception toute différente à l'adjectif *dense*. Selon cet auteur, un ensemble est dense si entre deux quelconques de ses points il en possède une infinité. Au sens

6. Tout point étranger à un ensemble fermé lui est extérieur. Un ensemble fermé s'obtient en retranchant d'un intervalle continu une infinité d'intervalles deux à deux sans points communs.

Si l'ensemble fermé considéré E est agrégé et, par suite, intérieur à l'intervalle ab, tous les intervalles extraits de ab ont leurs deux extrémités sur E, sauf le plus à gauche et le plus à droite de tous, ces derniers ayant l'un pour extrémité droite a, l'autre pour extrémité gauche b. Les premiers sont appelés *intervalles contigus* (¹) à E. Nous réservons à ces deux-ci le qualificatif de *semi-contigus* à E. Un ensemble fermé a deux points extrêmes, α et β. Il s'obtient en retranchant du segment $\alpha\beta$ un ensemble d'intervalles tous contigus à E. Quand nous parlerons d'un *segment contigu* à un ensemble fermé, il s'agira d'un intervalle contigu accru de ses extrémités. Un ensemble fermé est dense ou non dense sur un intervalle (ou un segment) ab, en même temps que son ensemble complémentaire formé par ses intervalles contigus et semi-contigus est non partout dense ou au contraire partout dense sur ab. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble fermé soit parfait est que deux quelconques de ses contigus ou semi-contigus n'aient pas d'extrémité commune.

On distingue sur un ensemble parfait P les points de seconde espèce, limites de points de P des deux côtés, et les points de première espèce, extrémités d'intervalles contigus à l'ensemble. Nous appelons points de première espèce gauches et points de première espèce droits respectivement les extrémités gauches et droites d'intervalles contigus. Il y a des points de P infiniment voisins des premiers du côté gauche,

---

ainsi convenu, un ensemble parfait discontinu devient dense si l'on en retranche toutes les extrémités de ses contigus. Cette définition diffère donc essentiellement de celle du texte, généralement adoptée d'ailleurs par les analystes. En distinguant les points limites d'un ensemble linéaire quelconque en 1re et 2e espèce, selon qu'ils sont limites des deux côtés ou d'un seul (les points de 1re espèce sont toujours en infinité dénombrable), l'ensemble dense de M. de la Vallée-Poussin est identique à notre ensemble dense en lui-même et ne contenant que des points de 2e espèce (sauf, si l'on veut, le plus grand et le plus petit de ses éléments).

(¹) Nous traiterons le mot « contigu » indifféremment en adjectif ou en substantif, comme on fait du mot « voisin ».

des seconds du côté droit. Nous conserverons la même classification des points limites d'un ensemble fermé quelconque E. Les extrémités des contigus à E seront soit des points isolés, soit des points de première espèce, droits ou gauches, selon qu'ils sont limites de E du côté droit ou du côté gauche, les autres points de E, non extrémités de contigus et nécessairement limites de E des deux côtés étant appelés points de seconde espèce de E.

Un ensemble fermé se décompose en un ensemble parfait P et un ensemble dénombrable Δ réductible dans chaque intervalle contigu à P. P sera appelé le *noyau* de E.

Tout ensemble fermé dénombrable est réductible.

7. Nous disons qu'une fonction f est *croissante de x à x'*, x et x' étant distincts, si la différence $f(x') - f(x)$ n'est pas nulle et a le signe de $x' - x$. Nous disons selon l'usage que f est *croissante dans un intervalle i* ou sur un segment s si elle est croissante entre tout point x et tout point x' agrégés l'un et l'autre à l'intervalle i ou au segment s. f est dite *décroissante* dans les conditions mêmes où $-f$ est croissante. Quand une fonction est soit croissante, soit décroissante, sans qu'il soit utile de préciser davantage, on la qualifie souvent de « monotone », adjectif dont le gallicisme n'est peut-être pas de très bon aloi. En considération de ce que, x allant de a et b, une fonction à sens de variation constant sur ab, quitte sa valeur initiale $f(a)$ pour gagner sa valeur finale $f(b)$ par une oscillation simple dans l'échelle des nombres, nous dirons qu'une telle fonction est *unioscillante sur ab*. Si elle présente un seul maximum ou un seul minimum dans l'intervalle ab, nous la qualifierons de *bioscillante*. Le sens des mots *tri-*, *quadri-oscillante* s'explique de lui-même. Une fonction possédant un nombre total de maximums et de minimums supérieur à 1, mais non davantage spécifié, sera dite *plurioscillante;* et enfin *multi-oscillante* si elle en a une infinité. Une fonction unioscillante sur un intervalle ab est caractérisée, quand on la suppose continue, par la condition que $f(x') - f(x)$ n'est jamais nul, quand x et x', agrégés à l'intervalle considéré, sont distincts l'un de l'autre.

8. Nous dirons qu'une fonction est *constante en un point*, si elle

est constante dans tout un intervalle entourant ce point. Une fonction f constante en tout point d'un intervalle ab est constante sur tout l'intervalle ab ([1]).

9. C'est un théorème connu (LI, p. 12) qu'*une fonction continue constante dans tout contigu à un ensemble fermé dénombrable est constante entre ses points extrêmes.* En effet, soit E un ensemble fermé quelconque dans les contigus duquel une fonction continue f est constante. Soient α, β les extrémités de E. Considérons l'ensemble P des points M de l'intervalle $\alpha\beta$ où f n'est pas constant. Par hypothèse, si petit que soit un intervalle contenant M, f y prend au moins deux valeurs distinctes. En un point quelconque étranger à E, donc intérieur à un contigu de E, f est constant. Donc, tous les points de P sont agrégés à E. P est évidemment fermé. Je dis que P n'a pas de point isolé. Sinon, un tel point M séparerait deux intervalles j et k où P n'aurait pas de points. f, constante en tout point de j, est constante sur j (**8**). Elle est de même constante sur k. Soient $f(j)$ et $f(k)$ les valeurs uniques qu'elle prend sur chacun de ces intervalles. f étant continue et M étant extrémité de j, on a $f(\mathrm{M})=f(j)$. On a de même $f(\mathrm{M})=f(k)$. La réunion de j, de k et de M forme un intervalle où f est constant. Donc, f est constant en M, contrairement à l'hypothèse que M est agrégé à P. Donc, P ensemble fermé sans points isolés est parfait. Deux cas sont alors à distinguer : 1° E est dénombrable. Alors P ne peut pas exister, puisque E ne contient pas d'ensemble parfait. Donc

---

([1]) En effet, soient c un point de cet intervalle et x un point quelconque compris entre a et b. Je dis que $f(x)=f(c)$. En effet, par hypothèse, c est dans un intervalle $\alpha\beta$ ou $i(c)$ où f est constant. Soit L la borne supérieure stricte des points x' intérieurs à ab et où $f(x')=f(c)$. L appartient au segment βb. Je dis que L est en b. Sinon L serait compris entre β et b, donc intérieur à ab. L est intérieur à un intervalle $i(\mathrm{L})$, où f est constant. L étant point limite des x', il y a dans $i(\mathrm{L})$ des points x' où $f(x')=f(c)$. Donc, dans $i(\mathrm{L})$, f est égal à $f(c)$ et L n'est pas la borne à droite des x', ce qui contredit notre hypothèse. Donc, dans l'intervalle ab en tout point à droite de c, f est égal à $f(c)$. On montre qu'il en est de même à gauche de c. Donc f a une valeur unique en tous les points de l'intervalle ab. Si f est continu, f est constant sur tout le *segment* ab.

f est constant en tout point intérieur à $\alpha\beta$. f étant continu est constant sur tout le segment $\alpha\beta$ [1].

2° Si E n'est pas dénombrable, soit H son noyau. P est agrégé à H, si P existe, ce dont la possibilité est bien connue et va être rappelée à l'instant. f étant constant en tout point étranger à P, est constant dans tous les contigus et semi-contigus à P situés sur l'intervalle $\alpha\beta$. Et f n'est constant en aucun point de P. Nous reviendrons sur cette question dans la deuxième Partie et mettrons en évidence un ensemble parfait remarquable agrégé à P.

10. Rappelons comment, P étant un ensemble parfait non dense et borné, on construit une fonction continue constante dans les contigus à P et cependant variable dans tout intervalle contenant au moins un point de P. Rangeons, en une suite unique et sans répétitions, les nombres d'un ensemble dénombrable partout dense sur l'intervalle $0 - 1$ et intérieur à lui; par exemple les nombres

$$(1) \qquad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{k}{2^m}, \quad \ldots,$$

les entiers k étant tous impairs. Il est possible de donner à chaque contigu de P un rang tel que deux contigus quelconques présentent géométriquement la même situation mutuelle que les nombres $\frac{k}{2^m}$ de même rang possèdent dans l'échelle des grandeurs. En effet, donnons l'indice 1 au plus grand contigu de P ou, si plusieurs contigus (en nombre fini) possèdent la longueur maximum, donnons cet indice 1 au plus à gauche d'entre eux. $u_1, u_2, \ldots, u_n$ étant choisis et disposés mutuellement comme le sont $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{k}{2^m}$ ou $N_1, N_2, \ldots, N_n$, si

[1] Cette démonstration évite l'emploi des nombres transfinis, dont la considération fournit cependant l'explication la plus satisfaisante (LI, p. 12) du théorème précédent, l'ensemble dénombrable E étant réductible, c'est-à-dire ne possédant plus de dérivés non nuls à partir d'un certain rang. Bien que nous soyons appelé à faire dans ce Mémoire un usage essentiel et inévitable de l'ordonnance transfinie, cependant, en vue de suivre les préférences probables de beaucoup de nos lecteurs, nous donnerons, dans la mesure du possible, des démonstrations indépendantes de cette notion.

N_{n+1} nombre consécutif à N_n dans la suite (1) admet, parmi les nombres N_h d'indices inférieurs à lui, pour plus proches voisins N_p à gauche, N_q à droite (l'un au moins de ces deux points existe), u_{n+1} sera parmi les contigus à P situés à droite de u_p et à gauche de u_q, celui qui, n'ayant sa longueur surpassée par celle d'aucun autre, est en même temps le plus à gauche possible. A cause de la non-densité de P, il y a une infinité de contigus à P dans l'intervalle borné par u_p et u_q. L'application de la règle est toujours possible.

Tous les u_m d'indice inférieur à $n+1$ seront situés relativement à u_{n+1} du même côté que les nombres N_m correspondants sont relativement à N_{n+1}. Il est aisé de voir que le tour de chaque contigu à P finit par venir. Tous ces contigus reçoivent donc un numéro d'ordre. Deux quelconques d'entre eux sont placés l'un par rapport à l'autre comme les points N de même rang le sont entre eux.

Considérons maintenant un point ξ quelconque de P. Il constitue une coupure entre les intervalles u' situés à sa gauche et les intervalles u'' placés à sa droite. Les points N' homologues des premiers et les points N'' homologues des seconds forment eux-mêmes deux classes entre lesquelles tous les N_n se répartissent et telles que tout nombre de la première est à gauche de tout nombre de la seconde. Ces deux classes déterminent un nombre coupure η qui correspond au point de P considéré. A deux points de P, ξ et ξ', correspondent deux points η, η' du segment $0-1$ disposés comme le sont ξ et ξ', sauf le cas où ξ et ξ' sont extrémités d'un même contigu u_n, auquel cas η et η' ne sont pas distincts, mais coïncident avec N_n. A tout nombre du contigu u_n faisons correspondre N_n. Alors, si a et b sont les points extrêmes de P, à tout point x compris entre a et b correspond un nombre $g(x)$ unique, invariable sur chaque segment contigu à P, fonction continue de x et croissante quand on passe d'un point de P à un autre situé à sa droite.

Soit $\psi(u)$ une fonction continue quelconque de u, arbitrairement définie dans l'intervalle $0-1$. $\psi[g(x)] = \chi(x)$ est la fonction continue la plus générale, constante dans chaque intervalle contigu à P. Convenons de dire qu'une fonction est croissante (ou décroissante) sur P si elle est croissante (ou décroissante) de l'un à l'autre de deux points quelconques de P, non extrémités d'un même intervalle contigu.

Alors, si $\nu(u)$ est la fonction croissante la plus générale, $\nu[g(x)]$ et $-\nu[g(x)]$ sont les fonctions les plus générales constantes dans tout contigu à P, et respectivement croissantes ou décroissantes sur P.

10 *bis*. Étant donné un ensemble fermé quelconque E dont chaque contigu u a reçu un numéro d'ordre propre, supposons que relativement à u_n nous définissions un certain nombre V_n, positif ou négatif, tel que la série V_n soit absolument convergente. Alors, x et x' étant deux nombres quelconques ($x < x'$), nous désignerons par $(x\Sigma x')V_n$ la somme $\sigma(x, x')$ des termes de la série V_n relatifs aux intervalles u_n *entièrement agrégés à l'intervalle* xx'. Donc, si x et x' sont sur E (même si x et x' sont points de première espèce de E, le premier gauche, le second droit), tout contigu ayant des points compris entre x et x' est représenté dans la série σ, car ses deux extrémités sont agrégées au segment xx'. Si x est intérieur à un intervalle u_p ou a_pb_p, V_p ne figure pas dans la série σ, ni V_q si $a_q < x' < b_q$. Mais, si x est a_p ou si x' est b_q, σ contient respectivement les termes V_p ou V_q. A titre d'exemple, si nous prenons $V_n = u_n$ et si $\lambda(x)$ est la mesure de E (*voir* ci-dessous) entre son extrémité gauche a et x, le lecteur montrera l'identité suivante :

$$(x\Sigma x')u_n = x' - x - [\lambda(x') - \lambda(x)] - \omega(b_p - x) - \omega'(x' - a_q)$$

avec $\omega = 0$, si x est sur E, $\omega = 1$ si $a_p < x < b_p$, $\omega' = 0$ si x' est sur E, $\omega' = 1$ si $a_q < x' < b_q$.

Si x surpassait x', nous poserions

$$(x\Sigma x')V_n = -(x'\Sigma x)V_n.$$

Mais il est toujours sous-entendu, si mention expresse du contraire n'est pas faite, que, dans l'expression $\sigma(x, x')$, le premier nombre x est inférieur au second x'.

11. Les notations précédentes étant adoptées, soit E un ensemble fermé borné. Considérons une fonction ainsi définie pour toutes les

valeurs de x agrégées au segment ab des extrémités de E :

$$y(x) = (a\Sigma x)V_n,$$

si x est sur E ;

$$y(x) = (a\Sigma x)V_n + y_m(x)$$

si

$$a_m < x < b_m,$$

$y_n(x)$ étant une fonction définie exclusivement sur u_n. Dans la seconde expression de $y(x)$, on pourrait écrire le premier terme $(a\Sigma a_m)V_n$. On a le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que y soit continue est que $y_n(x)$: 1° soit continue sur u_n avec les valeurs initiales et terminales 0 et V_n ; 2° ait sur u_n une valeur absolue maximum infiniment petite avec $\frac{1}{n}$.

Montrons d'abord la nécessité de ces conditions, donc qu'elles sont vérifiées si y est continu.

En effet, x étant intérieur à u_m, $(a\Sigma x)V_n$ coïncide avec $(a\Sigma a_m)V_n$. Donc, sur le champ $a_m < x < b_m$, où y_m est défini, y ne diffère que par une constante de $y_m(x)$. Donc, $y_m(x)$ doit être continu en tout point intérieur à u_m et de plus tendre comme $y(x)$ vers une limite quand x tend vers a_m et vers b_m sans quitter u_m. En désignant par $y_m(a_m)$ et $y_m(b_m)$ ces deux limites, la fonction y_m est maintenant définie et continue en tout point du segment $a_m b_m$. On doit avoir

$$y(a_m) = \lim_{x=a_m} y(x) = (a\Sigma a_m)V_n + \lim_{x=a_m} y_m(x),$$

$$y(b_m) = \lim_{x=b_m} y(x) = (a\Sigma a_m)y_n + \lim_{x=b_m} y_m(x),$$

les valeurs limites correspondant à des variations de x intérieures à u_m.

De là en se reportant aux valeurs de y en a_m et b_m, savoir

$$y(a_m) = (a\Sigma a_m)V_n$$

et

$$y(b_m) = (a\Sigma b_m)V_n = (a\Sigma a_m)V_n + V_m,$$

on trouve

$$y_m(a_m) = 0, \qquad y_m(b_m) = V_m.$$

La première condition des y_n est donc établie.

La seconde résulte de ceci que, n croissant indéfiniment, u_n tend nécessairement en longueur vers zéro, si E est borné. Car la série u_n est alors convergente. Or, $y_n(x)$ est la différence $y(x) - y(a_n)$ quand x est sur u_n. La continuité des fonctions étant uniforme, la valeur absolue maximum de $y_n(x)$ sur son intervalle de définition u_n tend vers zéro quand n croît indéfiniment, puisque $x - a_n$, positif et inférieur à u_n, tend aussi vers zéro. Les conditions énoncées sont donc nécessaires.

Montrons qu'elles sont suffisantes. D'abord si $y_m(x)$ défini sur l'intervalle u_m est continu dans cet intervalle, et tend vers zéro quand x tend vers a_m, vers V_m quand x tend vers b_m, x restant dans les deux cas intérieur à u_m, $y(x)$, qui ne diffère de $y_m(x)$ à l'intérieur de u_m que par la quantité $(a\Sigma a_m)V_n$, tend vers

$$(a\Sigma a_m)V_n = y(a_m)$$

et vers

$$(a\Sigma a_m)V_n + V_m = (a\Sigma b_m)V_n = y(b_m)$$

respectivement quand x, sans quitter l'intérieur de u_m, tend vers a_m et vers b_m. Donc, y est continu sur tout segment contigu à E et pour l'intérieur de ce segment, en particulier en tout point de première espèce de E, droit ou gauche, du côté opposé à E et aux points isolés de E des deux côtés. Il suffit donc d'établir la continuité de y aux points de E non isolés, pour les deux côtés en ceux de seconde espèce, et en ceux de première espèce pour le seul côté où ils sont limites de points de P. C'est seulement ici qu'intervient l'hypothèse

$$\lim_{n\,\infty} |y_n(x)| = 0.$$

Donnons-nous un nombre ε positif et montrons la possibilité de définir h de façon que l'inégalité $|x - x'| < h$ entraîne $|y' - y| < 3\varepsilon$, quels que soient x et x' agrégés au segment ab. Soit d'abord, conformément à la dernière hypothèse, un nombre N_1, tel que, pour toute valeur de n supérieure à N_1, $2|y_n(x)| < \varepsilon$. Alors, si x et x' sont

agrégés à un segment u_m d'indice supérieur à N_1, on a

$$|y'-y| = |y_m(x') - y_m(x)| < |y_m(x')| + |y_m(x)| < \varepsilon.$$

Pour chaque segment u_n d'indice au plus égal à N_1, y étant continu sur lui, il est possible de définir un nombre h_n tel que, x et x' étant simultanément agrégés à ce segment u_n, l'inégalité $|x - x'| < h_n$ entraîne $|y' - y| < \varepsilon$. Soit h_0 le plus petit des nombres $h_1, h_2, \ldots, h_{N_1}$. Alors, si x et x' sont deux nombres agrégés à un même segment u_n et distants entre eux de moins de h_0, que l'indice n surpasse ou non N_1, on a

$$|y'-y| < \varepsilon.$$

La série V_n étant par hypothèse absolument convergente, posons

$$\rho_n = |V_{n+1}| + |V_{n+2}| + \ldots$$

et soit N_2 un nombre tel que $\rho_{N_2} < \varepsilon$. Désignons par h'_0 la plus petite des longueurs des intervalles $u_1, \ldots, u_{N_2}$. Si la distance de deux points s, t est inférieure à h'_0, les indices des intervalles u_n entièrement agrégés à l'intervalle st surpassent tous N_2 et la somme $(s\Sigma t)V_n$ est en valeur absolue inférieure à ρ_{N_2}, donc à ε. Prenons pour h le plus petit des deux nombres h_0 et h'_0. Soient x et x' deux nombres quelconques du segment ab et distants de moins de h. Si x et x' sont agrégés au même segment u_n, d'après $|x' - x| < h < h_0$, $|y' - y|$ est inférieur à ε. Si x et x' sont séparés par des points de E, on a, en supposant x inférieur à x',

$$(a\Sigma x')V_n = (a\Sigma x)V_n + (x\Sigma x')V_n + \omega V_p,$$

ω étant nul si x est sur E, égal à 1 si x est intérieur à l'intervalle u_p. De là l'égalité

$$y' - y = (x\Sigma x')V_n + \omega[y_p(b_p) - y_p(x)] + \omega'[y_q(x') - y_q(a_q)]$$

avec

$$y_p(b_p) = V_p, \qquad y_q(a_q) = 0,$$

ω étant nul si x est sur P, égal à 1 si x est intérieur à u_p, ω' étant nul si x' est sur E, égal à 1 si x' est intérieur à u_q. Mais, d'après

$$0 < x' - x < h'_0,$$

le premier terme est inférieur à ε en valeur absolue. D'après $b_p - x$ et $x' - a_q < x' - x < h_0$, ε surpasse aussi la valeur absolue des deux derniers termes. Donc, $|y' - y| < 3\varepsilon$ moyennant

$$0 < x' - x < h \qquad \text{et} \qquad a < x < x' < b.$$

La continuité de $y(x)$ est donc établie en tout point du segment ab étranger ou agrégé à E.

La condition

$$\lim_{n\,\infty} |y_n(x)| = 0$$

est indispensable à l'exactitude du théorème. Nous aurions $V_n = 0$, avec

$$y_n(x) = \sin 2\pi \frac{x - a_n}{u_n},$$

et les conditions de convergence absolue de la série V_n, celles de continuité de la fonction $y_n(x)$ sur u_n seraient vérifiées. y étant

$$(a \Sigma x) V_n + \omega y_m(x)$$

avec $\omega = 0$ ou $\omega = 1$ selon que x est agrégé à E ou intérieur à u_m, y serait bien continu hors de E et aux points de E isolés, et encore aux points limites de première espèce de E du côté opposé à E. Mais en tout point de seconde espèce de E des deux côtés, aux points de première espèce du côté de E, $y(x)$ serait discontinu et admettrait toutes les valeurs limites du segment $-1, +1$.

11 *bis*. Soit $f(x)$ une fonction continue sur le segment ab des points extrêmes de E. Posons

$$V_n = f(b_n) - f(a_n) \qquad \text{et} \qquad y_n(x) = f(x) - f(a_n),$$

y_n étant défini uniquement sur le segment u_n. Supposons enfin la série V_n absolument convergente et soit

$$y(x) = f(a) + (a \Sigma x) V_n + \omega y_m(x),$$

ω étant nul si x est sur E et égal à 1 si x est dans l'intervalle u_m. Je dis que, si E est dénombrable, on a $f(x) = y(x)$. Soit $\theta(x)$ la

différence $f(x) - y(x)$. Nous voulons prouver que θ est nul. En effet, f étant continu, $|y_n(x)|$, comme nous l'avons montré, tend vers zéro pour n infini. Donc, $y(x)$ est une fonction continue. Donc, θ est continu. Or, dans l'intervalle u_m, y ne diffère de y_m et par suite de f que par une constante additive. Donc, dans l'intervalle u_m, θ est constant. Donc, E étant dénombrable, et θ continu, θ est constant entre les extrémités a et b de E. Comme θ est nul en a, θ est identiquement nul. L'expression de $f(x)$ est donc établie.

Supposons E non dénombrable, soit P son noyau parfait. Alors, toujours dans l'hypothèse de la convergence absolue de la série V_n, θ est constant sur chaque segment U_p contigu à P, E étant dénombrable et fermé sur le segment U_p. Mais θ n'est pas nécessairement nul dans tous ces contigus. Si A est l'extrémité gauche de P,

$$\theta(A) = \theta(a) = 0$$

et par suite

$$y(A) = f(A).$$

Soient A_p et B_p les extrémités de U_p. E étant dénombrable sur U_p, nous avons dans cet intervalle l'identité

$$f(x) = f(A_p) + (A \Sigma x) V_m + \omega y_m(x) = f(A_p) + y(x) - y(A_p),$$

ω étant 0 ou 1, selon que x est sur E ou intérieur à u_m, intervalle lui-même inclus dans U_p. Quand x varie dans U_p posons

$$Y_p(x) = f(x) - f(A_p) = y(x) - y(A_p).$$

Je dis que : 1° la série $Y_p(B_p) = f(B_p) - f(A_p) = W_p$ est absolument convergente, et 2° si nous définissons ainsi $Y(x)$:

$$Y(x) = f(A) + (A \Sigma x) W_p + \omega' Y_q(x),$$

ω' étant 0 ou 1 selon que x est agrégé à P ou intérieur à U_q, $y(x)$ est identique à $Y(x)$. Nous avons en effet

$$W_p = Y_p(B_p) = y(B_p) - y(A_p) = (A_p \Sigma B_p) V_n.$$

Donc, quel que soit ξ sur P, l'expression $(A \Sigma \xi) W_p$ est une série

double formée avec les termes de la série $(A\Sigma\xi)V_n$, de manière que chaque terme V_n de la seconde figure dans l'un des W_p et dans un seul, une fois et une seule. La deuxième série étant absolument convergeante, il en est de même de la première [ce qui donne un sens à la définition de $Y(x)$] et toutes deux ont la même somme. Or,

$$(A\Sigma\xi)W_p = Y(\xi) - Y(A), \qquad (A\Sigma\xi)V_n = y(\xi) - y(A).$$

L'égalité de ces quatre nombres signifie que $Y - y$ est constant sur P, et par suite nul comme en A, d'après $Y(A) = f(A) = y(A)$. Or, l'expression de Y_p montre que $Y - y$ est constant sur U_p. Y et y étant l'une et l'autre continues pour des raisons de même nature, $Y - y$ est bien nul, et $y(x)$ est susceptible de revêtir la forme de Y.

Ce qui précède nous fait comprendre pourquoi nous ne considérerons guère d'expression de la forme y que dans le cas où E est parfait. Dans l'hypothèse de la convergence absolue de la série V_n, la série y peut en effet être supposée réduite comme nous venons de le faire dans chaque contigu au noyau P de l'ensemble fermé E. D'ailleurs, dans un intervalle sans points communs avec P, toute fonction continue f est caractérisée, à une constante additive près, par les y_n d'où résultent les V_n, tandis qu'il n'en est plus de même dans un intervalle contenant des points de P.

Nous montrerons un peu plus loin que, si la série des valeurs absolues maximum de $y_n(x)$ sur u_n est convergente, on peut en conclure pour la plupart des points de seconde espèce de P l'existence d'une dérivée nulle pour y, sans que la continuité de y_n soit même nécessaire.

12. Nous appelons avec M. Baire *portion* d'un ensemble parfait P l'ensemble des points de P situés sur un segment continu j possédant à son intérieur au moins un point de P et par suite une infinité non dénombrable de points, avec cette réserve que les extrémités de j sont ou non incorporées à la portion considérée suivant qu'elles en sont points limites ou points isolés. Ce dernier cas se présente si j a une extrémité commune avec un intervalle u contigu à P, tous les autres points de u étant intérieurs à j.

Considérons par exemple l'ensemble parfait classique obtenu en retranchant du segment 0 — 1 les points intérieurs au tiers médian, puis de chacun des deux segments conservés, les points intérieurs à leurs tiers médians et ainsi de suite. Les points restants sont, comme on sait, ceux qu'il est possible d'écrire dans le système numérique de base 3, avec les seuls chiffres 0 et 2. Les points de cet ensemble situés dans l'intervalle $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ forment une portion ayant pour extrémités $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{3}$. Les points $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ sont de seconde espèce. Les points de P agrégés au *segment* $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ forment une autre portion de P, tandis que l'*intervalle* $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ détache de P un ensemble non fermé et *a fortiori* non parfait, donc ne constituant pas une portion de P. Le segment $\frac{1}{9}$, $\frac{8}{9}$, dont les extrémités sont sur P, contient une portion de P ne renfermant ni l'un ni l'autre des points $\frac{1}{9}$, $\frac{8}{9}$, lesquels sont isolés dans l'ensemble commun à P et au segment. La portion définie par ce même segment linéaire a pour points extrêmes $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{9}$. En somme, *une portion de* P *est un ensemble parfait* ϖ *agrégé à* P *et contenant tous les points de* P *situés dans l'intervalle de ses propres points extrêmes* (ceux de ϖ).

Au lieu de portion de P, nous dirons parfois *segment* de P. Pour éviter toute confusion, nous qualifierons de *linéaire* un segment continu.

15. On dit qu'un ensemble *fermé* est *dense* sur P, s'il contient au moins une portion de P. On dit qu'un ensemble *non fermé* E est *dense* sur P, si l'ensemble des points (E, P) commun à E et à P a pour dérivé un ensemble (fermé) dense sur P, donc admet dans son dérivé (lequel est tout entier sur P) une portion de P. K est dit *partout dense* sur P si l'ensemble (K, P) admet pour dérivé la totalité de P. Un ensemble G *non dense* sur P est donc tel que l'ensemble (G, P) n'admet dans son dérivé δ(G, P) aucune portion de P. Cette définition équivaut à la suivante : G est non dense sur P si

toute portion de P en renferme une autre ne contenant aucun point de G ([1]).

14. C'est une propriété essentielle des ensembles non denses sur un ensemble parfait continu ou non que la réunion d'une infinité dénombrable d'entre eux ne peut pas reconstituer l'ensemble parfait qui est leur base commune. La démonstration en est simple. A la suite d'ensembles non denses $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, on fait correspondre une suite de portions de l'ensemble parfait P, soit $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n, \ldots$, de manière que ϖ_n soit compris dans ϖ_{n-1} et ne contienne aucun point de E_n, couple de conditions toujours réalisable connaissant ϖ_{n-1}, à cause de la non-densité de E_n. Les ϖ_n ont en commun au moins un point étranger à tous les E_n. Donc la réunion des E_n n'épuise pas P. D'ailleurs, ϖ_1 peut être choisi intérieur à n'importe quelle portion ϖ de P. Donc, l'ensemble G des points étrangers à tous les E_n est partout dense sur P. De plus, G, pas plus que P, ne peut être épuisé par l'extraction d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses.

15. M. Baire a désigné, sous le nom *d'ensemble de première catégorie sur* P, tout ensemble E réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses sur P. Les ensembles agrégés à P et ne présentant pas ce dernier caractère sont appelés par le même auteur « ensembles de deuxième catégorie ». Ces dénominations nous paraissent présenter le défaut de n'être pas suffisamment explicites par elles-mêmes; elles ne possèdent pas ce caractère éminemment souhaitable d'éveiller dans l'esprit du lecteur ou de l'auditeur, grâce à leur seule étymologie ou à leur simple acception dans le langage courant, l'intuition du sens spécial et précis qu'on veut leur donner. De plus, il me paraît

---

([1]) Soit H un ensemble fermé agrégé à l'ensemble parfait P et non dense sur lui. Soient α et β les extrémités d'une portion ϖ de H. Tous les points de ϖ font partie de P, mais si, entre α et β, P n'avait pas d'autres points (nécessairement inclus dans des contigus à ϖ), ϖ serait une portion de P. H contenant une portion de P serait dense sur ce dernier. Pour que H soit non dense sur P : 1° il n'est pas nécessaire que, dans tout contigu à H, P possède des points, mais 2° les contigus à H contenant des points de P doivent être ainsi distribués que toute portion de H admette des contigus de cette sorte.

essentiel de faire jouer un rôle particulier, entre tous les ensembles « de deuxième catégorie », à ceux qui sont complémentaires d'un ensemble « de première catégorie ». Ceux-ci sont obligatoirement partout denses, nous l'avons vu, sur l'ensemble parfait continu ou discontinu auquel on les rattache. Les autres au contraire, sans être non denses, peuvent n'avoir pas de points dans certains intervalles (ou certaines portions de P). Par exemple les deux intervalles $0 - 1$ et $2 - 3$ sont l'un et l'autre des ensembles indécomposables en une infinité dénombrable d'ensembles non denses. Ils ne sont cependant ni l'un ni l'autre partout denses sur le continu. Nous sommes conduits à subdiviser la seconde catégorie en deux, les catégories $2a$ et $2b$, ainsi distinguées l'une de l'autre : Sur l'ensemble parfait P, un ensemble $(2b)$ a pour complémentaire un ensemble de première catégorie; un ensemble $(2a)$ et son complémentaire sont de deuxième catégorie l'un et l'autre.

Considérons les premiers ensembles. On obtient l'un d'eux R, en extrayant indéfiniment, de l'ensemble parfait P, des ensembles non denses sur lui. R est l'ensemble des points jamais retranchés, et qui subsisteraient seuls si l'on effectuait, d'un seul coup, cette infinité d'extractions. Je propose d'appeler G un *résiduel* de P. C'est donc par définition le complémentaire d'un ensemble de première catégorie sur P.

Nous qualifierons d'*inexhaustible* sur l'ensemble parfait P, continu ou non, un ensemble I agrégé à P et qu'on ne peut constituer avec une infinité dénombrable d'ensembles non denses sur P. C'est exactement l'ensemble général de seconde catégorie de M. Baire. Inversement, on ne peut pas épuiser I en retranchant de lui une infinité dénombrable de ces derniers ensembles. De là, le nom proposé d'*ensembles inexhaustibles*. Tout résiduel est inexhaustible, mais la réciproque n'est pas vraie. Une propriété essentielle d'un résiduel de P est en effet d'être partout dense sur P, tandis que deux portions complémentaires de P, séparées par un contigu, sont l'une et l'autre inexhaustibles et toutefois bien évidemment, aucune n'a de points sur l'autre. La propriété capitale des résiduels est la suivante. *Deux résiduels ou même une infinité dénombrable de résiduels relatifs à un même ensemble parfait* P *ont en commun un résiduel de* P. Car

l'ensemble R commun à deux ensembles R_1, R_2, ou à une infinité d'ensembles R_n a pour complémentaire D la réunion des complémentaires $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$, de $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$. Si D_n est la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses sur P, il en est de même de D. Donc R, ensemble commun aux R_n et complémentaire de D, est un résiduel de P.

R et I étant l'un résiduel, l'autre inexhaustible sur P, R et I ont des points communs. En effet, si nous retranchons de I tous les points appartenant en même temps au complémentaire D de R, il reste des points de I, sinon I serait agrégé à D et par suite de première catégorie. D'ailleurs les points de I étrangers à D forment un ensemble I′ inexhaustible s'il en est ainsi de I. Or, I′ est l'ensemble commun à R et à I. Donc, un résiduel et un ensemble inexhaustible ont en commun un ensemble inexhaustible. Mais deux ensembles inexhaustibles n'ont pas nécessairement des points communs.

Reste à désigner les ensembles de première catégorie. Un ensemble de cette sorte peut être partout dense, constituer une pleine épaisseur du continu (*voir* ci-après), il a néanmoins une trame plus disloquée, plus granuleuse que son complémentaire. Celle de ce dernier est plus touffue, plus unie, plus cohérente que celle-là, si ces dernières expressions peuvent s'appliquer à un ensemble généralement discontinu, tout au moins s'il est linéaire. Si l'on veut adopter une épithète s'appliquant au cas des ensembles à plusieurs dimensions, il faut qu'elle convienne également à des aspects aussi opposés que les suivants : d'un côté l'ensemble comprenant les droites d'abscisses rationnelles parallèles à l'axe des y, associées aux droites d'ordonnées rationnelles parallèles à l'axe des x, ou, avec plus de deux dimensions, la totalité des plans parallèles à l'un quelconque des plans de coordonnées et situés à une distance rationnelle de celui-ci; d'un autre côté, l'ensemble (dénombrable) des points à coordonnées toutes rationnelles. Dans la première espèce, deux points quelconques de l'ensemble peuvent être toujours reliés par un continu agrégé à lui, il n'en est jamais ainsi dans le complémentaire entre deux quelconques de ses points. C'est le contraire pour la seconde espèce, entièrement discontinue, à l'opposé des ensembles complémentaires. Des qualificatifs assez naturels tels que « rompu », « disjoint » doivent être

rejetés à cause de la structure quasi continue d'ensembles auxquels on serait conduit à les attribuer. « Dissociable » n'évoque pas une idée suffisamment caractéristique. On peut songer à utiliser en radicaux des mots tels que « grille », « crible », à rappeler que ces ensembles « amplifient » les ensembles non denses. Je propose d'appeler *gerbe* ou *ensemble gerbé sur l'ensemble parfait* P continu ou non, la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses sur P.

Notions d'ordre métrique.

Les définitions précédentes sont relatives aux propriétés descriptives des ensembles. Les propriétés descriptives sont celles qui se conservent dans une transformation continue ainsi que son inverse. Les propriétés métriques sont celles qui subsistent dans une transformation du type précédent, mais possédant de plus un coefficient différentiel fini en tout point.

16. Au point de vue descriptif, les ensembles se caractérisent essentiellement par leurs propriétés à l'égard de la densité. Descriptivement, l'ensemble quasi vide est l'ensemble non dense, et par extension l'ensemble gerbé. Le théorème de M. Baire : « une fonction de classe 1 (ou limite de fonctions continues) est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait » ou plus précisément « les points de continuité sur P d'une fonction f de classe 1 forment un résiduel de P, les points de discontinuité de f sur P constituant un ensemble gerbé », ce théorème pourrait encore s'énoncer ainsi : « Descriptivement, une fonction de classe 1 est presque partout continue sur chaque ensemble parfait ». Une transformation continue quelconque mais toujours croissante ou décroissante effectuée sur x conserve les propriétés de densité ou de non-densité des ensembles. Elle laisse donc invariantes les classifications des ensembles en résiduels, inexhaustibles ou gerbés. Mais nous verrons plus loin (**65**) qu'elle ne conserve nullement en général le caractère d'épaisseur (**19**) ou de non-épaisseur présenté par un ensemble. On montrerait sans peine que ces caractères sont maintenus quand la transformation possède en chaque point une dérivée finie (à signe constant, pour la continuité de la transforma-

tion inverse). Il est remarquable que dans l'étude de diverses catégories de fonctions, entre autres les fonctions analytiques, les fonctions sommes de séries trigonométriques, dont la définition est en rapport étroit avec la notion de dérivée (les premières ont une dérivée par rapport à z, les secondes sont des dérivées secondes généralisées par rapport à l'arc), les points où ces fonctions jouissent de propriétés exceptionnelles ou perdent leurs caractères fondamentaux, en un mot les singularités de ces fonctions forment des ensembles se répartissant naturellement en classes différenciées les unes des autres, simultanément par l'allure des fonctions au voisinage de ces ensembles et par les propriétés métriques de ces derniers. A l'appui de cette observation, je rappellerai les oppositions typiques présentées entre elles par les fonctions analytiques uniformes au voisinage de leurs singularités discontinues, selon que celles-ci ont une longueur nulle, ou une longueur finie, ou une longueur infinie avec aire nulle ou aire non nulle, etc. Il est assez naturel d'ailleurs que, l'existence d'une dérivée aux points réguliers indiquant la possibilité de mesurer la variation élémentaire d'une fonction de x ou de z au moyen de la variation élémentaire de x ou de z, l'étendue des points où certaines irrégularités se présentent intervienne dans la nature des aspects exceptionnels offerts par la fonction dans leur voisinage. Le point de vue métrique se présente dans les moindres détails de l'étude des fonctions analytiques. Il se manifeste en particulier dans cette méthode de raisonnement universelle dans cette théorie et consistant à ramener chaque proposition à un théorème sur la croissance. Dans le présent Mémoire, les principaux résultats obtenus découleront de l'association des propriétés métriques des dérivées et nombres dérivés des fonctions à leurs propriétés descriptives. Nous ne devons pas oublier, en effet, qu'une dérivée bi- ou unilatérale est la limite d'une fonction continue $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, h tendant vers zéro bi- ou unilatéralement. Les ensembles quasi vides intéressant les dérivées ou les nombres dérivés sont donc de deux sortes, les ensembles sans épaisseur et les ensembles gerbés. Complémentairement, les ensembles quasi universels, les ensembles pour lesquels les locutions « sur l'un deux » et « presque partout » sont synonymes, seront aussi bien, selon les cas, les résiduels que les pleines épaisseurs.

17. Nous allons rappeler les définitions essentielles utilisées dans la mesure des ensembles, et présenter de cette opération une analyse succincte, mais indispensable pour la suite de ce Mémoire ([1]).

D'après MM. Borel et Lebesgue, un ensemble E_1 rectiligne, situé sur un segment s dont la longueur est prise pour unité, est dit *mesurable*, s'il est possible, pour toute valeur de ε, de définir deux familles d'intervalles $\varphi_1(\varepsilon)$, $\varphi_2(\varepsilon)$, tels que : 1° tout point de E_1 est intérieur à un intervalle φ_1 et tout point de E_2, complémentaire de E_1 sur s, est intérieur à un intervalle φ_2; 2° $l_1(\varepsilon)$ et $l_2(\varepsilon)$ désignant respectivement la somme des longueurs des intervalles φ_1 et φ_2, satisfont aux inégalités $1 < l_1(\varepsilon) + l_2(\varepsilon) < 1 + \varepsilon$. On montre alors que, ε tendant vers zéro, $l_1(\varepsilon)$ et $l_2(\varepsilon)$ tendent respectivement en décroissant vers deux limites l_1 et l_2 qui sont leurs bornes inférieures et dont la somme est évidemment l'unité. $l_1(\varepsilon)$ et $l_2(\varepsilon)$, chacun supérieurs à leur limite, l'excèdent de moins de ε. l_1 et l_2 sont appelés respectivement *mesure* ou *longueur* de E_1 et de E_2. Un ensemble et son complémentaire sont donc simultanément mesurables ou non. Le résultat suivant est fondamental dans la théorie de la mesure : L'ensemble formé de la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles deux à deux distincts et mesurables, est mesurable et a pour longueur la somme des mesures des ensembles composants. On en regardant leurs complémentaires, l'ensemble des points communs à une infinité dénombrable et ordonnée en suite simple, d'ensembles mesurables dont chacun est agrégé au précédent, cet ensemble est mesurable et sa mesure est la borne inférieure des longueurs des ensembles dont il est le résidu. Par suite : un ensemble dénombrable est de mesure nulle; un ensemble, formé des points intérieurs à une infinité d'intervalles dont deux quelconques d'entre eux n'empiètent pas l'un sur l'autre, est mesurable et a pour mesure la somme de la

---

([1]) Les résultats des n°s 18-20 ne prétendent à aucune originalité. Ils sont une conséquence toute naturelle des définitions de la mesure donnée par MM. Borel et Lebesgue, à qui revient uniquement la priorité globale de tous ces corollaires. Mais leur utilité dans les applications métriques des ensembles est extrême et ils s'imposent d'eux-mêmes à l'attention des géomètres, comme le montre la fréquence avec laquelle ils ont été énoncés. (*Voir*, par ex., Fatou, *Bull. Soc. math.*, t. XLI, 1913; Denjoy, *Comptes rendus*, 7 mars 1910, etc.).

série formée par les longueurs des intervalles, lesquelles peuvent, comme on sait, toujours être rangées dans une suite unique. Un ensemble fermé étant toujours complémentaire d'un ensemble du type précédent est mesurable. Je me borne à rappeler tous ces résultats en renvoyant le lecteur pour de plus amples explications aux travaux de M. Lebesgue. Mais il sera intéressant d'éclairer la notion d'ensemble mesurable par la brève analyse suivante.

18. Supposons inférieur à l_1 le nombre ε figurant dans la définition des intervalles $\varphi_1(\varepsilon)$ et $\varphi_2(\varepsilon)$. La longueur totale des $\varphi_2(\varepsilon)$, soit $l_2(\varepsilon)$, est inférieure à $l_2+\varepsilon$. Soit $F_1(\varepsilon)$ l'ensemble des points qui ne sont intérieurs à aucun des $\varphi_2(\varepsilon)$. $F_1(\varepsilon)$ est fermé. $F_1(\varepsilon)$ ne comprend aucun point de E_2, donc est agrégé à E_1. Le complémentaire de $F_1(\varepsilon)$, constitué par les contigus à $F_1(\varepsilon)$, a chacun de ses points intérieur à au moins un intervalle $\varphi_2(\varepsilon)$. La longueur totale des contigus à $F_1(\varepsilon)$ est donc au plus égale à celle des $\varphi_2(\varepsilon)$, soit $l_2(\varepsilon)$. $F_1(\varepsilon)$ a donc une mesure au moins égale à $1-l_2(\varepsilon)>l_1-\varepsilon$. Soit $P_1(\varepsilon)$ le noyau parfait de $F_1(\varepsilon)$. Un ensemble fermé et son noyau, ne différant que par un ensemble dénombrable, ont même mesure. Nous aboutissons donc à la conséquence suivante qui sera par la suite d'une application constante :

Étant donné un ensemble E *de mesure positive, si petit que soit le nombre positif* ε, *il existe un ensemble parfait agrégé à* E *et dont la mesure diffère de moins de* ε *de celle de* E.

Ce théorème nous conduit à une proposition très importante. Soient l la mesure de E et θ un nombre positif inférieur à 1. Nous pouvons déterminer un ensemble parfait P_1 agrégé à E et de mesure supérieure à $(1-\theta)l$. Soient E′ l'ensemble des points de E étrangers à P_1 et l' la mesure de E′. l' est inférieur à θl. Si l' est différent de zéro, déterminons un ensemble parfait P_2 agrégé à E′, et dont la mesure surpasse $(1-\theta)l'$, et ainsi de suite. Généralement, supposons déterminés les ensembles parfaits $P_1, P_2, \ldots, P_n$ deux à deux distincts, agrégés à E. Soit $E^{(n)}$, de mesure $l^{(n)}$, l'ensemble des points agrégés à E et étrangers à $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Alors P_{n+1} est par définition un ensemble parfait agrégé à $E^{(n)}$ (donc distinct des P_i d'indice

inférieur) et de mesure supérieure à $(1-\theta)l^{(n)}$. Cette règle étant appliquée successivement aux valeurs entières de n, nous trouvons que $l^{(n)}$ est inférieur à $\theta^n l$. Deux cas peuvent se présenter. Ou bien, pour une valeur finie de n, $l^{(n)}$ sera nul et alors E est la réunion d'un nombre fini d'ensembles parfaits, donc au total un ensemble de ce même type, augmenté d'un ensemble de mesure nulle. Ou bien, si $l^{(n)}$ n'est jamais nul, tout point de E est soit dans l'un des P_n, soit dans $E^{(n)}$ pour toute valeur de n, donc dans l'ensemble H commun aux $E^{(n)}$ (chacun d'eux étant inclus dans le précédent). $l^{(n)}$ tendant vers zéro, H est forcément de mesure nulle. En résumé :

Un ensemble mesurable est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits et d'un ensemble de mesure nulle (¹).

Ce résultat ramène la notion de la mesure à deux éléments, l'un à la vérité parfaitement clair et naturel, concernant les ensembles parfaits (la longueur d'un tel ensemble est l'excès de la longueur du segment support de l'ensemble sur la somme des intervalles contigus, leurs longueurs étant, comme il est possible, ordonnées en une série); l'autre plus difficile à saisir, rassemblant en lui ce qu'il y a de plus ingénieux et de plus profond dans la définition de MM. Borel et Lebesgue, et intéressant spécialement les ensembles de mesure nulle, lesquels sont descriptivement en général infiniment plus compliqués que les ensembles décomposables en une infinité d'ensembles parfaits. Observons, en effet, que l'ensemble ramassant en lui toute la longueur de E est gerbé, si le complémentaire de E est partout dense, et que nous avons montré du même coup le théorème suivant : *Tout ensemble mesurable (dont le complémentaire est partout dense) est la somme d'un ensemble gerbé et d'un ensemble de mesure nulle* (²).

19. Une notion indispensable à l'étude approfondie des fonctions

(¹) S'il s'agissait de mesure spatiale à deux ou plusieurs dimensions, les démonstrations et leur conclusion s'étendraient à des cas sans aucune difficulté.

(²) Si le complémentaire D de E n'est point partout dense, l'énoncé précédent est encore vrai. Pour s'en rendre compte, il suffit, dans chaque intervalle ω (en

dérivées est celle de l'épaisseur d'un ensemble mesurable. Nous appellerons *épaisseur d'un ensemble* E *sur un intervalle* ab, le quotient par la longueur ab, de la mesure de la partie de E située sur ab. Ce rapport est évidemment compris entre 0 et 1 inclusivement.

Nous appellerons *épaisseur d'un ensemble* E *en un point* M, agrégé ou étranger à E, la limite unique, si elle existe, de l'épaisseur de E sur un intervalle i contenant M et dont la longueur tend indépendamment vers zéro. Si E possède en M l'épaisseur e, pour toute valeur de ε, on peut déterminer h de façon que, dans tout intervalle contenant M et de longueur inférieure à h, l'épaisseur de E est comprise entre $e - \varepsilon$ et $e + \varepsilon$.

La somme des épaisseurs d'un ensemble et de son complémentaire sur un même intervalle est évidemment égale à 1. Donc, leurs épaisseurs en un même point quelconque sont simultanément définies ou non, et dans le premier cas, leur somme est 1.

Si E n'a pas en M d'épaisseur définie, nous appellerons *épaisseur maximum* et *épaisseur minimum* de E en M, respectivement la plus grande et la plus petite limites possibles de l'épaisseur de E sur i, quand i contenant M tend indifféremment vers zéro en longueur. Les deux nombres ainsi définis sont évidemment agrégés au segment $0 - 1$.

Nous dirons qu'un ensemble est *épais*, si sa mesure n'est pas nulle, qu'il est *épais en lui-même*, si sa mesure n'est nulle dans aucun intervalle contenant intérieurement un de ses points. Les ensembles de mesure nulle seront aussi appelés *ensembles sans épaisseur* ou encore *ensembles minces*. Nous dirons qu'un ensemble E est *épais en un point* M, agrégé ou étranger à E, si, dans tout intervalle contenant M à son intérieur, E est épais (¹). L'ensemble E_1 des points au voisinage

---

infinité dénombrable) où D n'a pas de points, d'ajouter à D tous les nombres rationnels de ω. On diminue E et l'on accroît D d'un ensemble e dénombrable, ce qui ne change pas les mesures de E ni de D. Au nouvel ensemble E′ substitué à E appliquons le théorème précédent. E′ est décomposé en une infinité dénombrable d'ensembles parfaits P_n nécessairement discontinus, augmentée d'un ensemble mince e'. E est donc la réunion des P_n, accrue de l'ensemble $e + e'$, lui aussi mince, puisque e est dénombrable.

(¹) Si un ensemble E a l'épaisseur *un* en un point M, son complémentaire D possède l'épaisseur *zéro* en ce même point. Mais ceci n'empêche nullement que D

desquels E est épais, est fermé, ne contient pas de points isolés, donc est parfait. Dans chaque intervalle contigu à E_1, E a une mesure nulle. Donc, les points de E étrangers à E_1 ont une mesure totale nulle. Ainsi, on ne diminue pas la mesure d'un ensemble en le réduisant à ceux de ses points au voisinage desquels il est épais. Dans tout intervalle contenant un point de E_1, E et par suite E_1 ont une mesure positive. Donc, E_1 est épais en lui-même. Si E est fermé, E_1 lui est évidemment agrégé. Il est visible que le théorème du n° **18** peut s'énoncer ainsi : *Tout ensemble mesurable épais est la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits épais en eux-mêmes, deux à deux distincts et d'un ensemble mince.* Les ensembles parfaits décrits dans cet énoncé peuvent toujours être supposés discontinus, même si l'ensemble à décomposer est ou contient un intervalle (p. 128).

Nous dirons qu'un ensemble constitue une *épaisseur pleine* (sous-

---

soit épais en M, c'est-à-dire que, dans tout intervalle contenant M, D ait une mesure positive; pas plus que le fait pour une fonction de posséder en un point la dérivée zéro n'entraîne qu'elle soit constante dans tout un intervalle contenant ce point (il n'y a pas simplement analogie des deux cas, l'épaisseur en un point est une dérivée). Il faut d'autre part concevoir qu'un ensemble et son complémentaire peuvent être simultanément épais en tout point d'un même intervalle. Supposons, en effet, le segment $0-1$ décomposé en une infinité dénombrable d'ensembles parfaits P_n deux à deux distincts, discontinus, épais en eux-mêmes, augmentée d'un ensemble mince η. Dans tout intervalle intérieur au segment $0-1$, une infinité d'ensembles P_n possèdent des points. D'ailleurs, la réunion d'un nombre quelconque fini de P_n constitue un ensemble parfait non dense. Soit ε_p un nombre positif tendant vers zéro quand p croît. J'attribue à l'ensemble E, d'abord l'ensemble η, puis les h premiers ensembles $P_1, P_2, \ldots, P_h$, en nombre suffisant pour que leur réunion ait ses contigus tous inférieurs à ε_1. Ensuite, j'affecte à D les ensembles suivants $P_{h+1}, \ldots, P_k$, en quantité suffisante pour que l'ensemble parfait formé par eux ait tous ses contigus inférieurs à ε_2. Et je continue ainsi la répartition des P_n entre E et D alternativement. Il est visible que, dans tout intervalle inclus dans $0-1$, chacun de ces derniers ensembles existe et est épais. Pareillement, par un groupement des P_n effectué suivant une règle analogue à la précédente, on pourrait décomposer le segment $0-1$ en une infinité dénombrable d'ensembles E_m deux à deux distincts et chacun épais en tout point. Ces considérations aident à saisir tout l'intérêt du théorème du n° 20.

entendu : du continu) si son complémentaire est de mesure nulle. La locution « sur une épaisseur pleine » remplacera pour nous l'expression fréquemment employée « presque partout » dont le défaut est de présenter deux sens différents selon les points de vue, métrique ou descriptif, où l'on se place. Nous dirons qu'un ensemble E agrégé à l'ensemble épais P constitue *une pleine épaisseur de* P, si le complémentaire de E relativement à P est mince ou encore si E et P ont même mesure. Nous allons démontrer le très important théorème suivant :

20. *L'épaisseur d'un ensemble mesurable est égale à* un, *en chacun de ses points, sauf éventuellement en ceux d'un ensemble mince.* Ou encore : *l'épaisseur de* E *est égale à* un, *sur une pleine épaisseur de* E.

Une preuve immédiate de cette proposition est fournie par ce théorème de M. Lebesgue : Si f est sommable, l'intégrale besgienne de f entre a et x a pour dérivée f sur une épaisseur pleine. Si l'on se rappelle que, par définition de la somme besgienne, l'intégrale d'une fonction égale à *un* sur un ensemble et à *zéro* sur son complémentaire, est égale à la mesure de l'ensemble dans l'intervalle où l'intégration est effectuée, il est évident que la mesure de E entre a et x admet, sauf éventuellement en un ensemble mince, pour dérivée l'unité si x est dans E, et zéro si x est extérieur à E. Donc, en dehors de ces points exceptionnels, x étant agrégé à E, l'épaisseur de E dans un intervalle ayant x pour extrémité fixe tend vers 1 quand l'intervalle tend vers zéro. Il en est par suite de même si l'intervalle tend vers x en le contenant. La proposition est établie par M. Lebesgue dans ses *Leçons sur l'Intégration* (p. 123, 124), à vrai dire sans faire intervenir explicitement la notion d'épaisseur. Mais, comme il est au fond assez naturel, le théorème relatif à la dérivée de l'intégrale besgienne d'une fonction sommable, loin de précéder l'application que nous en avons faite, l'utilise au contraire en réalité comme lemme préliminairement démontré. Établissons donc directement cette proposition sur l'épaisseur des ensembles en leurs propres points.

Remarquons d'abord qu'il suffit, d'après la décomposition effectuée des ensembles mesurables, d'établir ce théorème pour un ensemble

parfait. Car, si E est la réunion d'une infinité d'ensembles parfaits deux à deux distincts, E_1, E_2, ..., E_n, ..., et d'un ensemble de mesure nulle R, il est évident que sur un segment quelconque l'épaisseur de E est égale à la somme des épaisseurs des ensembles E_n. Elle est donc au moins égale à l'épaisseur de chacun d'eux, sur un même segment et par suite en un même point. Si donc l'épaisseur de E_n est 1 sur E_n, sauf aux points d'un ensemble mince E'_n, aux points de E étrangers à E'_1, E'_2, ..., E'_n, ..., R, l'épaisseur de E sera 1. Ces points exclus forment un ensemble mince. Le théorème sera donc établi si nous le démontrons pour un ensemble parfait.

21. Soient P un tel ensemble, l sa mesure non nulle, a et b ses points extrêmes, u_1, u_2, ..., u_n, ... ses intervalles contigus sur le segment ab que nous prenons pour unité de longueur. Soient A et ε deux nombres fixes, choisis le premier très grand, le second très petit. Nous pouvons trouver un entier N tel que $R_N = u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots$ soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{2A}$. Les intervalles u_1, u_2, ..., u_N entièrement intérieurs à ab et deux à deux sans points communs, sont séparés sur ab par $N+1$ segments que je désigne dans l'ordre où ils sont rencontrés quand on parcourt ab de gauche à droite, par ρ_1, ρ_2, ..., ρ_{N+1}. Ces $N+1$ segments, extrémités comprises, renferment la totalité de P, leur partie complémentaire étant constituée par les divers intervalles u_n d'indices supérieurs à N. La somme des longueurs des ρ_m est donc supérieure à l et exactement égale à $l + R_N$. Considérons les intervalles j ou plus précisément $j(N, A)$ sans points extérieurs aux ρ_m $(m \leqq N+1)$ et sur lesquels l'épaisseur totale des u_n est au moins égale à $\frac{1}{A}$. Voici ce qu'il faut entendre par cette dernière expression.

P étant discontinu, j contient des points étrangers à P, donc agrégés à certains u_n. Parmi ces u_n, les uns sont entièrement situés dans j, les autres ont seulement une partie commune avec j. Dans tous les cas, les points communs à j et à certains u_n, ou encore les points appartenant à j et étrangers à P forment un ensemble dont la mesure est la somme des u_n ou portions de u_n situées sur j. Notre hypothèse est que cette mesure surpasse $\frac{j}{A}$, pour tout inter-

valle $j(N, A)$. Observons d'ailleurs que les u_n pénétrant dans un tel intervalle j ont un indice n surpassant forcément N, puisque tout intervalle j est entièrement situé sur un segment ρ_m et par suite n'a de points communs avec aucun des u_n d'indice inférieur à $N + 1$.

Considérons les points intérieurs à au moins un intervalle j. Ces points forment des champs linéaires. Soit i l'un de ceux-ci. Je dis que i peut être couvert avec une collection d'intervalles $j(N, A)$ de manière que tout point de i soit intérieur à l'un de ces $j(N, A)$ et à deux au plus. Observons en effet que si une suite d'intervalles $j(N, A)$, soit $j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots$, tend vers un intervalle limite J, je veux dire si les extrémités de j_n tendent respectivement vers celles de J : d'une part, les j_n sont tous à partir d'un certain rang intérieurs au même segment ρ_m, d'autre part sur J l'épaisseur totale des u_n est au moins $\frac{1}{A}$. Donc J est un intervalle $j(N, A)$. Nous exprimons cette propriété en disant que *les $j(N, A)$ forment un ensemble fermé d'intervalles*. De ceci résulte (*voir* Note I) le point à établir. Développons-en une démonstration.

Prenons dans i d'extrémités α et β un point intérieur quelconque γ. Parmi tous les $j(N, A)$ admettant γ à son intérieur ou l'ayant pour extrémité gauche, il y en a un, d'après l'hermétisme des j, dont une extrémité est la plus à droite. Si ces conditions sont remplies par plusieurs j, nous choisissons parmi ceux-ci le plus grand qui existe certainement, pour la raison énoncée à l'instant. Soient j_0 cet intervalle, γ_1 son extrémité droite et γ_0 son extrémité gauche. γ est en γ_0 ou entre γ_0 et γ_1. De même j_1 sera l'intervalle $j(N, A)$: 1° contenant γ_1 à son intérieur ou l'ayant pour extrémité gauche, 2° dont l'extrémité droite γ_2 est la plus éloignée à droite et le plus grand de ceux qui satisfont à ces conditions, s'il y en a plus d'un. Nous définissons successivement $j_2, j_3, \ldots$. Deux cas se présentent. Ou bien un point γ_{n+1}, extrémité d'un j_n, est en β. L'opération est arrêtée. Ou bien, il y a une infinité de points γ_n, à indices entiers positifs. Dans tous les cas, γ_p est l'extrémité droite de j_{p-1}; γ_p peut être intérieur à j_p ou être son extrémité gauche, et j_p, parmi les j ainsi particularisés, est le plus long de ceux dont l'extrémité droite γ_{p+1} est la plus éloignée possible de γ_p. γ_p est toujours en deçà de l'extrémité gauche de j_{p+h} $(h > 0)$, sinon j_p serait mal choisi et devrait être remplacé par j_{p+h}.

γ_p est évidemment au delà de l'extrémité droite γ_{p-h+1} de j_{p-h}, les γ_n progressant vers la droite quand leur indice croît. γ_p n'est donc intérieur à aucun j_p d'indice différent de p. Si γ_p n'est pas intérieur à j_p, lequel coïncide alors avec $\gamma_p\gamma_{p+1}$, désignons par j'_p un intervalle j quelconque contenant γ_p. j'_p laisse à son extérieur γ_{p-1} et γ_{p+1}, sinon j_{p-1} ou j_p auraient été choisis par erreur. Dans la suite j_n, intercalons j'_p entre j_{p-1} et j_p. Si alors j'_p empiète sur j_{p+1}, ou sur j'_{p+1} quand ce dernier existe, j'_p et j_{p+1} (ou j'_{p+1}) recouvrent $\gamma_p\gamma_{p+1}$ coïncidant avec j_p, que nous supprimons. Dans la suite restante, un point compris entre γ_0 et b est évidemment couvert par au moins un intervalle de la suite (j_p, j'_p). Je dis qu'il l'est par deux au plus. Si x en effet est en un point γ_p, il appartient en propre à j_p, si j_p le possède à son intérieur, sinon j'_p existe et est seul à contenir γ_p. Si x est distinct des γ_n, il est entre deux points tels que γ_p et γ_{p+1}. Seuls peuvent pénétrer dans cet intervalle j'_p, j_p, j'_{p+1} ou j_{p+1}. Est-il possible que x soit intérieur à trois d'entre eux simultanément? Non, car j'_{p+1} et j_{p+1} n'y pénètrent pas simultanément, puisque, si j'_{p+1} existe, j_{p+1} coïncide avec $\gamma_{p+1}\gamma_{p+2}$. Les trois intervalles contenant x seraient donc ou bien j'_p, j_p, j'_{p+1} ou bien j'_p, j_p, j_{p+1}. Mais, si j'_p et j'_{p+1} ou si j'_p et j_{p+1} ont en commun des points intérieurs, j_p ne figure pas dans la suite. Nous aboutissons à une contradiction. En opérant entre γ_0 et α comme entre γ_0 et β en échangeant le rôle des extrémités droite et gauche des intervalles, *on recouvre i ou $\alpha\beta$ avec une famille $j(i)$ d'intervalles j de telle manière que chaque point de $\alpha\beta$ soit intérieur à au moins un et au plus deux d'entre eux* [1].

La somme des longueurs des $j(i)$ est au plus égale à $2i$ et d'ailleurs au moins égale à i. Mais chaque intervalle $j(i)$ contient des u_n en longueur totale au moins égale à $\frac{j}{A}$. En additionnant les longueurs des $j(i)$ d'une part et celles des u_n intérieurs à chacun d'eux d'autre part, on trouve deux nombres dont le premier est au plus A fois le second. Mais le premier est au moins i. Le second est au plus le double de la somme $\sigma(i)$ des u_n intérieurs à i, puisque chaque u_n ou portion de u_n appartient simultanément à deux intervalles $j(i)$ au plus.

---

[1] Cette partie de la démonstration pourrait être supprimée si l'on supposait connus les résultats exposés dans la Note I.

Donc, $i < 2A\sigma(i)$. Et en ajoutant les longueurs de tous les champs i en nombre fini ou infini recouverts par les $j(N, A)$, on trouve un nombre λ inférieur à $2A \sum_{N+1}^{\infty} u_n = 2AR_N < \varepsilon$. Donc, ε étant supposé inférieur à l, en retranchant des ρ_m tous les champs i, il reste nécessairement un ensemble de mesure supérieure à $l - \varepsilon$. Soit $E(N, A)$ cet ensemble évidemment fermé. De quelles propriétés jouit un point $x(N, A)$ de cet ensemble, ce point étant supposé distinct des extrémités des segments ρ_m? Un tel point n'étant intérieur à aucun des $j(N, A)$, dans tout intervalle ω contenant $x(N, A)$ ou plus simplement x, et n'atteignant pas l'un des u_n d'indice inférieur à $N + 1$, donc ω étant intérieur à l'un des ρ_m, l'ensemble des $u_{N+1}, \ldots,$ a sur ω une épaisseur inférieure à $\frac{1}{A}$. Donc, l'épaisseur de P sur ω est au moins $1 - \frac{1}{A}$. Or les limites d'indétermination de l'épaisseur en x, s'entendent comme étant celles de l'épaisseur de P sur un intervalle contenant x et tendant vers lui. On ne change donc pas ces limites en bornant cet intervalle à ne varier comme ω que sur ρ_m, auquel x est supposé intérieur. Donc, la plus petite de ces limites est certainement au moins égale à $1 - \frac{1}{A}$. Remarquons que $E(N, A)$ est agrégé à P et même non dense sur P. Car, A surpassant 1, tout point soit intérieur à u_{N+p}, soit distant de u_{N+p} de moins de $(A - 1)u_{N+p}$ et agrégé à l'un des ρ_m, est intérieur à un intervalle $j(N, A)$, donc est étranger à $E(N, A)$. Aucun point extérieur à P, ni même (sauf les extrémités de $u_1, u_2, \ldots, u_N$) aucun point de première espèce de P ne faisant partie de $E(N, A)$, ce dernier est agrégé à P et ne peut contenir aucune portion de P. Comme il est fermé, il est non dense sur P. Retranchons de $E(N, A)$ les extrémités de $u_1, u_2, \ldots, u_N$, ce qui nous laisse un ensemble $E_1(N, A)$ ne contenant aucun point de première espèce de P. $E_1(N, A)$ s'obtient donc en retranchant de ab tous les segments u_n, ainsi que les points des $j(N, A)$ agrégés à P. Tout intervalle $j(N + k, A)$ est un intervalle $j(N, A)$ sans que d'ailleurs la réciproque soit vraie en général. Donc, l'ensemble $E_1(N, A)$ est compris dans tous les ensembles $E_1(N + k, A)$. Faisons croître N

indéfiniment. Le produit $2AR_N$ tend vers zéro et par suite la mesure de $E_1(N, A)$, supérieure à $l - 2AR_N$ et inférieure évidemment à l, tend vers ce dernier nombre. L'ensemble $E(A)$ des points appartenant à l'un au moins des $E_1(N, A)$ a donc même mesure que P. En tout point de $E(A)$, ce point étant nécessairement agrégé à l'un des $E_1(N, A)$, la plus petite épaisseur de P est au moins $1 - \frac{1}{A}$. Le complémentaire $G(A)$ de $E(A)$ relativement à P est de mesure nulle. Remarquons qu'en tout point de ce dernier ensemble la plus petite épaisseur de P est au plus $1 - \frac{1}{A}$. En effet, soit x' un point de $G(A)$ et de seconde espèce sur P, l'épaisseur minimum aux points de première espèce étant zéro. Quel que soit N, x' appartient à $G(N, A)$, donc est intérieur à un intervalle $j(N, A)$ situé dans un segment ρ_m compris entre deux des $u_1, u_2, \ldots, u_N$ géométriquement consécutifs. Sur $j(N, A)$ l'épaisseur des u_n est au moins $\frac{1}{A}$. Donc, celle de P est au plus $1 - \frac{1}{A}$. Or, cet intervalle j, dépendant de N, a une longueur infiniment petite avec $\frac{1}{N}$, de même que ρ_m, si les intervalles contigus à P, supposés partout denses, sont tous dans la suite u_n. L'épaisseur de P en x' a donc sa plus petite limite au plus égale à $1 - \frac{1}{A}$. En donnant à A une suite de valeurs indéfiniment croissantes, on obtient des ensembles $E(A)$ chacun inclus dans le précédent et ayant tous pour mesure l; ou des ensembles $G(A)$ contenant chacun le précédent et tous minces. L'ensemble E commun aux $E(A)$ a pour mesure l. En tout point de E, l'épaisseur de P surpasse $1 - \frac{1}{A}$, quel que soit A. Elle est donc égale à 1. La mesure de G, complémentaire de E sur P, est nulle. G est constitué par la réunion des points de P où l'épaisseur n'existe pas ou diffère de 1. L'ensemble $E(A)$ est gerbé sur P. L'ensemble $G(A)$ malgré sa mesure nulle est un résiduel de P. Les ensembles E, partie commune aux $E(A)$, et G, réunissant les $G(A)$, appartiennent aux mêmes catégories respectives.

22. Remarquons encore que, si $l(x)$ est la mesure de l'ensemble E entre un point fixe a (à gauche duquel la mesure de E sera comptée

négativement) et un point variable x, l'épaisseur de E et la dérivée de $l(x)$ existent ou n'existent pas simultanément et dans le premier cas elles ont la même valeur. Soient H le complémentaire de E et $\lambda(x)$ sa longueur entre a et x. On a $l(x)+\lambda(x)=x-a$. La dérivée de $l+\lambda$ existant toujours et étant l'unité, E et H ont donc une épaisseur définie aux mêmes points et leurs deux épaisseurs quand elles existent ont pour somme 1. Or, les ensembles e de E et η de H, où respectivement l'épaisseur de E et celle de H ne sont pas définies ou diffèrent de 1, ont l'un et l'autre une mesure nulle. Donc, en dehors de l'ensemble mince $e+\eta$, l'épaisseur de E est soit zéro, soit 1. Nous conclurons de là qu'*il est impossible de construire un ensemble* E *dont l'épaisseur soit partout définie, si ni* E *ni son complémentaire ne sont de mesure nulle.* Car, dans l'hypothèse opposée à celle-ci, la dérivée $l(x)$ existerait en tout point, prendrait effectivement les valeurs 0 et 1, mais ne recevrait les valeurs intermédiaires à 0 et 1 qu'en un ensemble de mesure nulle. Or, ceci est en opposition avec une propriété essentielle des fonctions dérivées. Mais il est toujours possible de réduire un ensemble E à ne posséder que des points où son épaisseur est définie, puisqu'en retranchant de E les points où il n'en serait pas ainsi, on ne modifie la mesure de E dans aucun intervalle, donc on lui laisse la même épaisseur, définie ou indéterminée en tout point.

25. P étant toujours un ensemble parfait épais en lui-même, supposons définie sur chaque segment contigu u_n à P une fonction $y_n(x)$ prenant en a_n la valeur zéro, en b_n la valeur V_n, non nécessairement continue sur u_n, mais telle que *le maximum de* $|y_n(x)|$ *soit le terme général* w_n *d'une série convergente.* La série V_n est *a fortiori* absolument convergente. a et b étant les extrémités de P, définissons sur le segment ab une fonction y par la relation

$$y=(a\Sigma x)V_n+\omega y_m(x),$$

ω étant nul si x est sur P, égal à 1 si x est intérieur à u_m. Je dis que y *est continu en tout point de seconde espèce de* P *et a, relativement à* x, *une dérivée nulle sur une pleine épaisseur de* P.

Le théorème se réduit à celui qui concerne l'égalité à 1 de l'épais-

seur de P, si l'on fait $y_n(x) = x - a_n$, $V_n = u_n$. Alors y est la mesure entre a et x de l'ensemble complémentaire de P. La dérivée de y est l'épaisseur de ce dernier. Elle est bien nulle sur une pleine épaisseur de P.

Nous allons d'abord montrer la continuité de y en tout point ξ de P au moins pour le côté où ξ est limite de points de P. En effet, soit $Y_n(x)$ une fonction définie sur u_n seulement, continue, unioscillante, nulle pour $x = a_n$, valant V_n pour $x = b_n$. Posons, ω ayant le sens déjà dit, $Y(x) = (a \Sigma x) V_n + \omega Y_m(x)$. $Y(x)$ est continu partout, comme nous l'avons vu (**11**). Soit $\theta(x) = Y(x) - y(x)$. y sera continu aux mêmes points que θ et pour les mêmes côtés. Or

$$|Y_n(x) - y_n(x)| < 2w_n.$$

Donc, $|\theta(x)| < 2\omega w_m$. Je dis que, en tout point ξ de P, θ est continu pour tout côté où il est limite de P. Car $\theta(\xi)$ est nul, et si x tend vers ξ d'un côté où ξ est limite de points de P, le rang minimum des u_n ayant au moins un point commun avec l'intervalle $x\xi$ croît indéfiniment quand $|x - \xi|$ tend vers zéro. Sinon, du côté considéré, un des u_n serait à une distance nulle de ξ, ce qui est absurde si ξ est limite de P de ce même côté. Donc, si w_n tend vers zéro pour n infini et en particulier si la série w_n est convergente, θ et par suite $y(x)$ sont continues en tout point de seconde espèce de P des deux côtés, et du côté de P en tout point de première espèce.

Nous établirons l'égalité $y'(x) = 0$ sur une pleine épaisseur de P, grâce à un mode de raisonnement très analogue à celui qui nous a servi dans le théorème sur l'épaisseur des ensembles.

β étant un segment dont les extrémités sont situées sur P, désignons par $\sigma(\beta)$ la somme des $|V_n|$ relatifs aux intervalles u_n ayant au moins un point commun avec β et par suite intérieurs à lui (les extrémités de β étant sur P). Si les segments $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i$ satisfaisant à cette dernière condition sont adjacents et consécutifs, si β est le segment réunissant les précédents, $\sigma(\beta)$ est évidemment la somme des $\sigma(\beta_i)$.

Cela posé, A étant un nombre positif quelconque et fixe, considérons, pour une valeur entière et déterminée de N, l'ensemble des intervalles $j(N, A)$ satisfaisant aux conditions suivantes : 1° leurs

extrémités sont sur P; 2° ils sont sans points communs avec les intervalles $u_1, u_2, \ldots, u_N$, donc agrégés à l'un quelconque des segments $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{N+1}$ séparés sur ab par ces derniers intervalles; 3° $\sigma[j(N, A)]$ vaut au moins $\frac{1}{A} j(N, A)$. Je dis que les intervalles $j(N, A)$ forment un système fermé. En effet, soit $\alpha_p \beta_p$ un intervalle $j(N, A)$ tendant, pour p infini, vers un intervalle $\alpha\beta$. Il nous faut montrer que $\alpha\beta$ satisfait aux trois conditions des intervalles $j(N, A)$. D'abord α_p et β_p étant sur P, il en est de même de α et de β (première condition). $\alpha_p \beta_p$ tendant vers un intervalle limite et étant toujours agrégé à l'un des segments ρ_m, est à partir d'une certaine valeur de p situé toujours sur un même ρ_m. Donc $\alpha\beta$ est sur ce dernier et par suite sans points communs avec u_n pour $n \leqq N$ (deuxième condition). Enfin, nous avons vu, en établissant la continuité de f, que, α_p tendant vers α sans quitter P et β_p tendant de la même façon vers β, les plus petits indices des u_n intérieurs soit à $\alpha\alpha_p$ (ou $\alpha_p\alpha$), soit à $\beta\beta_p$ (ou $\beta_p\beta$), croissent indéfiniment avec p. Donc $\sigma(\alpha_p\alpha)$ [ou $\sigma(\alpha\alpha_p)$ selon que α est supérieur ou inférieur à α_p] et $\sigma(\beta_p\beta)$ ou $\sigma(\beta\beta_p)$ tendent vers zéro. $\sigma(\alpha_p\beta_p)$ ne différant de $\sigma(\alpha\beta)$ que par la somme des deux nombres précédents affectés d'un signe convenable, on a bien $\lim. \sigma(\alpha_p\beta_p) = \sigma(\alpha\beta)$ et

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \sigma(\alpha\beta) = \lim \frac{1}{\beta_p - \alpha_p} \sigma(\alpha_p\beta_p) \geqq \frac{1}{A}$$

(troisième condition).

Le système $j(N, A)$ étant fermé est équivalent à un système strict choisi en lui-même, soit (j). Les points intérieurs à au moins un $j(N, A)$ ou, ce qui est équivalent, à au moins un (j), forment des intervalles i deux à deux distincts. Nulle extrémité de l'un des i n'est intérieure à l'un des $j(N, A)$. Tout point de i étant intérieur à au moins un (j) et à deux au plus, les extrémités des (j) intérieures à i le décomposent en segments alternativement agrégés à un seul (j) ou à deux (j). Soient j_1 les premiers et j_2 les seconds. On a $i = \Sigma j_1 + \Sigma j_2$ et la longueur totale des (j) intérieurs à i est évidemment supérieure à i et exactement égale à $\Sigma j_1 + 2\Sigma j_2 = i + \Sigma j_2$. On a de même $\sigma(i) = \Sigma\sigma(j_1) + \Sigma\sigma(j_2)$. D'ailleurs, tout intervalle (j) ayant des

points communs avec i et par suite intérieur à i, est décomposé en un j_1 et deux j_2, et $\sigma(j)$ vaut la somme des nombres $\sigma(j_1)$ et $\sigma(j_2)$ relatifs aux éléments j_1 et j_2 de (j). Donc, pour chaque intervalle i, chaque j_2 appartenant à deux (j) et chaque j_1 à un seul,

$$\Sigma\sigma(j) = \Sigma\sigma(j_1) + 2\Sigma\sigma(j_2),$$

la sommation étant dans les deux membres étendue à tous les j, j_1, j_2 intérieurs à i. Mais le premier membre est au moins $\frac{1}{A}\Sigma(j)$, donc au moins $\frac{1}{A}i$. Le second membre est inférieur à $2\sigma(i)$. Donc

$$i < 2A\sigma(i).$$

Telle est l'inégalité vérifiée par chaque champ recouvert par les $j(N, A)$. Ces champs sont deux à deux distincts par définition et intérieurs aux $N+1$ segments ρ_m. Les u_n intérieurs à l'un des i ont donc un indice n supérieur à N. Donc, si t_N désigne la somme $\sum_{N+1}^{\infty} |V_n|$, la somme des i, longueur totale du champ recouvert par les $j(N, A)$, est au plus $2At_N$. Cette longueur tend vers zéro quand N croît indéfiniment.

Considérons maintenant l'intervalle $u'_n(A)$ de même milieu que u_n et obtenu en rallongeant u_n de chaque côté de Aw_n. La longueur de u'_n vaut donc $u_n + 2Aw_n$.

Excluons de ab : 1° les *segments* $u_1, u_2, \ldots, u_N$; 2° les *segments* $j(N, A)$; 3° les *segments* $u'_{N+p}(A)$, p étant un entier positif quelconque. La totalité des points exclus forme un ensemble dont la mesure est inférieure à

$$\sum_1^N u_n + 2At_N + \sum_{N+1}^{\infty} u'_n(A) = \sum_1^{\infty} u_n + 2A(t_N + s_N),$$

en posant $s_N = \sum_{N+1}^{\infty} w_n$ (s_N vaut au moins t_N). l désignant la longueur de P, soit $b - a - \sum_1^{\infty} u_n$, les points exclus ont une mesure au plus égale à $b - a - l + 2A(t_N + s_N)$. Si donc N est choisi assez grand pour que $4As_N$ soit inférieur à l, le segment ab comprend des points non exclus. Ces points forment un ensemble $E(N, A)$ dont la mesure vaut au moins $l - 4As_N$.

Je dis d'abord que E(N, A) est agrégé à P et même ne comprend que des points de seconde espèce de P. En effet, le segment u_n étant agrégé au segment u'_n (et intérieur à lui, si $w_n \neq 0$), tous les segments u_n, que leur indice soit inférieur à N + 1 ou supérieur à N, sont compris dans les éléments constituant le complémentaire de E(N, A) sur ab.

E(N, A) est donc agrégé à P. Sa mesure surpasse $l - 4As_N$. Donc, son complémentaire relatif à P a une mesure inférieure à $4As_N$. D'ailleurs E(N, A) est inclus dans E(N + 1, A). Car, tous les éléments exclus de ab pour obtenir E(N + 1, A) figurent parmi ceux qui concernaient E(N, A). En effet : 1° le complémentaire de E(N) est formé pour une part des segments $u_1, u_2, \ldots, u_N, u'_{N+1}, u'_{N+2}, \ldots$, ensemble contenant celui des segments $u_1, u_2, \ldots, u_N, u_{N+1}, u'_{N+2}, \ldots$, relatifs à E(N, A), puisque u'_{N+1} contient u_{N+1} ; 2° le reste du complémentaire de E(N, A) est constitué par les éléments en excès dans les segments j(N, A). Or, tout segment j(N + 1, A) est un segment j(N, A). Car, d'abord j(N + 1) vérifie la condition $\sigma(j) \geqq \frac{1}{A} j$, et possède ses deux extrémités sur P; de plus, j(N + 1) entièrement étranger à chacun des intervalles $u_1, \ldots, u_{N+1}$ l'est en particulier aux N premiers de ces intervalles. C'est donc bien un intervalle j(N, A).

Donc, l'ensemble E(A) réunissant tous les E(N, A) et agrégé à P comme chacun d'eux, a pour mesure la limite de leurs mesures, soit l. E(A) est une pleine épaisseur de P. Je dis que, ξ étant un point quelconque de E(A), donc un point agrégé à un certain E(N, A) (et à tous les suivants), le quotient $\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ ne peut avoir de limites excédant $\frac{3}{A}$ en valeur absolue, quand x tend vers ξ par valeurs inférieures ou supérieures.

En effet, ξ agrégé à E(N, A) est un point de seconde espèce de P, nécessairement intérieur à l'un des segments $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{N+1}$, soit à ρ_i. x tendant vers ξ finit par devenir et rester intérieur à ρ_i. x étant agrégé à ρ_i, supposons-le d'abord situé sur P. On a évidemment et en supposant par exemple $\xi < x$,

$$|f(x) - f(\xi)| \leqq (\xi \Sigma x) |V_n| = \sigma(\xi x)$$

et pour $x < \xi$,

$$|f(x) - f(\xi)| \leqq \sigma(x\xi).$$

Or, nous avons $\sigma(\xi x)$ ou $\sigma(x\xi) < \frac{1}{A}|x-\xi|$, sinon ξx serait un segment $j(N, A)$ et ξ serait étranger à $E(N, A)$. Donc

$$\left|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\right| < \frac{1}{A}$$

quel que soit x dans ρ_i sur P.

Soit maintenant x intérieur à ρ_i et en même temps étranger à P, donc intérieur à un intervalle u_m dont l'indice excède nécessairement N. On a, ξ n'étant ni intérieur ni extrême à u_m, $|x-\xi| > A w_m$. Or, a_m et b_m étant les extrémités de u_m, supposons d'abord $x > \xi$. Alors

$$f(x) - f(\xi) = y_m(x) + f(a_m) - f(\xi).$$

Donc, $|f(x) - f(\xi)|$ est inférieur à

$$w_m + \frac{1}{A}(a_m - \xi) < \frac{2}{A}(x-\xi).$$

Si x est inférieur à ξ, $f(\xi) - f(x) = f(\xi) - f(b_m) + V_m - y_m(x)$. Alors $|f(x) - f(\xi)| < \frac{1}{A}(\xi - b_m) + 2w_m < \frac{3}{A}(\xi - x)$. Donc, quel que soit x sur ρ_i, agrégé ou étranger à P, $\left|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\right|$ est inférieur à $\frac{3}{A}$. Aucune des valeurs limites de ce quotient ne peut donc excéder $\frac{3}{A}$.

Donnons à A une suite discrète de valeurs croissantes et tendant vers $+\infty$. Les ensembles $E(A)$ correspondants sont chacun contenus dans le précédent. Car, si $A < A'$, $E(N, A')$ est inclus dans $E(N, A)$. La mesure de chacun des $E(A)$ étant l, ils ont en commun un ensemble ayant cette même mesure et, comme eux tous, agrégé à P. Cet ensemble E est donc une pleine épaisseur de P. En un point ξ de E, aucune valeur limite de $\left|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\right|$ ne saurait, x tendant vers ξ, surpasser $\frac{3}{A}$, si grand que soit A. Donc, en ξ, f a une dérivée nulle. Or, E est une pleine épaisseur de P. C. Q. F. D.

CHAPITRE II.

THÉORÈMES FONDAMENTAUX SUR LES NOMBRES DÉRIVÉS.

24. Nous appellerons *variation* (ou *variation simple*) d'une fonction continue f entre a et b, la différence $f(b)-f(a)$. Nous appellerons *variation absolue* (ou arithmétique) de f entre a et b la valeur absolue de la variation simple de f entre les mêmes points, soit $|f(b)-f(a)|$, et enfin *variation relative entre a et b* le quotient par $b-a$ de la variation simple de f entre ces points, soit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Nous désignons respectivement les trois nombres définis à l'instant par les notations $V(f, a, b)$ ou $(aVb)f$, $VR(f, a, b)$ ou $(aVRb)f$, $VA(f, a, b)$ ou $(aVAb)f$. La lettre f pourra être supprimée quand il n'y aura aucune ambiguïté possible concernant la fonction dont il s'agit. D'après les définitions posées, nous avons

$$V(f, b, a) = -V(f, a, b), \qquad VA(a, b) = VA(b, a), \qquad VR(a, b) = VR(b, a).$$

Je rappelle que, sauf mention expresse du contraire, de deux nombres énoncés successivement sous forme de lettres, et jouant des rôles symétriques, le premier est toujours supposé moindre que le second. En vertu de cette règle, si a est inférieur à b, nous n'écrirons jamais $VA(b, a)$ ni $VR(b, a)$, mais toujours $VA(a, b)$ et $VR(a, b)$. En particulier, $b-a$ étant positif, une inégalité telle que $VR(f, a, b) < \alpha$ ou $> \beta$ peut encore s'écrire

$$f(b)-f(a) < \alpha(b-a) \qquad \text{ou} \qquad > \beta(b-a).$$

25. La variation relative $VR(f, x, x+h)$ de f entre un point immobile x et un point variable $x+h$, suivie quand h tend vers zéro par valeurs toutes positives, possède dans le cas le plus général, pour champ de ses valeurs limites, un segment continu, fini ou infini, dont l'extrémité maximum Δ_d est appelée *nombre dérivé supérieur droit*, l'extrémité minimum δ_d étant le *nombre dérivé inférieur droit*. Ces

deux nombres peuvent être infinis. Nous sommes conduits à distinguer sept cas : 1° $\Delta_d = \delta_d = +\infty$; 2° $\Delta_d = +\infty$, δ_d fini; 3° $\Delta_d = +\infty$, $\delta_d = -\infty$; 4° Δ_d fini, δ_d fini, avec $\Delta_d > \delta_d$; 5° $\Delta_d = \delta_d$, l'un et l'autre finis; 6° Δ_d fini, $\delta_d = -\infty$; 7° $\Delta_d = \delta_d = -\infty$.

Dans les cas 1°, 5°, 7°, où Δ_d et δ_d coïncident, on dit que $f(x)$ a une *dérivée droite*, limite unique du quotient $\mathrm{VR}(f, x, x+h)$ quand h tend vers zéro par valeurs positives. La dérivée est alors la valeur commune des deux dérivés extrêmes supposés coïncidents, $+\infty$ la première fois, un nombre fini la seconde, $-\infty$ la troisième.

Supposons Δ_d et δ_d distincts. Soit μ_d un nombre compris entre Δ_d et δ_d. L'égalité $f(x+h) - f(x) = \mu_d h$ est réalisée pour une infinité de valeurs positives de h tendant vers zéro, à cause de la continuité du quotient $\mathrm{VR}(f, x, x+h)$, effective tant que h diffère de zéro. En effet, $\mathrm{VR}(f, x, x+h)$ admettant pour valeurs limites Δ_d et δ_d séparés par μ_d, il existe un nombre h_1 tel que $\mathrm{VR}(f, x, x+h_1) > \mu_d$, puis h_2 inférieur à h_1 tel que $\mathrm{VR}(f, x, h_2) < \mu_d$, h_{2n-1} et h_{2n} se définissant tour à tour, positifs, décroissants contrairement à l'indice, tendant vers zéro, et satisfaisant alternativement à l'une et à l'autre des inégalités $\mathrm{VR}(f, x, x+h_{2n-1}) > \mu_d$ et $\mathrm{VR}(f, x, x+h_{2n}) < \mu_d$. Entre deux termes de la suite h_m, la fonction continue $\mathrm{VR}(f, x, x+h)$ prend donc au moins une fois la valeur μ_d; μ_d sera appelé un *dérivé médian droit* de f en x.

L'égalité d'un dérivé extrême avec la variation relative de f entre x et $x+h$, réalisée pour une infinité de valeurs de h, tendant vers zéro, est un cas exceptionnel.

On définit pareillement, en faisant tendre h vers zéro par valeurs négatives, les deux *dérivés gauches*, *supérieur* Δ_g et *inférieur* δ_g, respectivement plus grande et plus petite limite de la variation relative de f entre $x+h$ et x quand h tend vers zéro par valeurs négatives, et les *dérivés médians gauches*, qui sont tous les nombres intermédiaires à Δ_g et δ_g, et qui coïncident pour une infinité de valeurs négatives infiniment petites de h avec $\mathrm{VR}(f, x+h, x)$.

Quand les dérivés extrêmes gauches coïncident, leur valeur commune prend le nom de *dérivée gauche*. f est dite avoir une *dérivée*, si les deux dérivées droite et gauche existent et coïncident.

Pour éviter des confusions, nous qualifierons souvent de « bilaté-

rale » la dérivée ordinaire d'une fonction f. Une dérivée valant pour un seul côté, qu'il est inutile de préciser, sera appelée dérivée « unilatérale ». Une dérivée latérale sera considérée comme la réunion des deux dérivés extrêmes relatifs au même côté et non pas comme un dérivé médian.

26. Ces définitions pouvant présenter dans l'esprit du lecteur certaine obscurité quand elles s'appliquent à des nombres infinis, expliquons à titre d'exemple leur sens dans deux ou trois de ces cas :

1° Un nombre dérivé gauche est $+\infty$, et il n'y a point de dérivée gauche. On a alors forcément $\Delta_g = +\infty$, δ_g étant fini ou infini négatif. La traduction arithmétique de cette hypothèse est l'existence, si petit que soit α et si grand que soit A, d'un nombre positif h inférieur à α, tel que

$$\mathrm{VR}(f, x-h, x) > \mathrm{A} \qquad \text{ou} \qquad f(x) - f(x-h) > \mathrm{A}h,$$

sans que ces inégalités soient vérifiées pour tous les nombres h inférieurs à un nombre positif α. Ou encore, il y a deux suites $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$; $h'_1, h'_2, \ldots, h'_n, \ldots$, décroissant à zéro et telles que, pour la première, $\mathrm{VR}(f, x, x-h_n)$ tende vers $+\infty$, $\mathrm{VR}(f, x, x-h'_n)$ tendant soit vers $-\infty$, soit vers un nombre fini. Au contraire, 2° on a la dérivée gauche $+\infty$ en x, si, quel que soit A, on peut calculer α de manière que la simple inégalité $0 < h < \alpha$ entraîne

$$f(x) - f(x-h) > \mathrm{A}h.$$

$+\infty$ est alors la limite de $\dfrac{f(x) - f(x-h_n)}{h_n}$ pour toute suite h_n décroissant vers zéro.

Enfin, 3° f a pour dérivée $-\infty$ en x, si à tout nombre positif A on peut faire correspondre un nombre α positif, tel que la seule condition $|h| < \alpha$ entraîne $\dfrac{f(x-h) - f(x)}{h} < -\mathrm{A}$.

27. Le théorème suivant nous permettra fréquemment d'éliminer *a priori* l'hypothèse de certaines associations de valeurs pour les quatre nombres dérivés extrêmes d'une même fonction en un même point.

THÉORÈME. — *Les points où le dérivé supérieur pour l'un des côtés est moindre que le dérivé inférieur pour l'autre côté forment un ensemble dénombrable.*

Nous démontrerons préalablement une propriété générale des ensembles parfaits à deux dimensions [1]. Donnons le nom de *sommet* d'un tel ensemble P à l'un de ses points M, s'il existe un angle TMT′ d'ouverture inférieure à π et contenant tous les points de P voisins de M, j'entends tous les points de P situés à une distance de M inférieure à un certain nombre positif dépendant seulement de M. Je dis qu'un ensemble parfait ne peut posséder qu'une infinité dénombrable de sommets. En effet, convenons d'appeler « suffragant » d'un élément quelconque N de P, tout point H du plan, pour lequel N est sur P le point plus rapproché de H. Géométriquement, la propriété caractéristique des suffragants de N est que le cercle de centre H et de rayon HN ne contient à son intérieur aucun point de P et n'en possède sur sa circonférence aucun différent de N. Tous les points intérieurs au rayon HN sont suffragants de N si H l'est. Un point H du plan ne peut évidemment être suffragant de plus d'un point de P. Tout point de P n'a pas nécessairement de suffragant. Mais nous allons montrer que les suffragants de tout sommet de P forment un ensemble contenant une aire. Des aires deux à deux distinctes étant nécessairement en infinité dénombrable, la même propriété de puissance en résultera bien pour les sommets de P.

Soient donc M un sommet de P et γ un cercle de centre M et de rayon ρ, tel que tous les points de P intérieurs à γ soient dans le secteur TMT′ d'angle au centre α inférieur à π. Enlevons du cercle γ, de part et d'autre de ce secteur, un quadrant de γ. Il reste dans γ un secteur $T_1MT'_1$ d'ouverture $\pi - \alpha$. Limitons ce dernier à sa portion intérieure au cercle γ' concentrique à γ et de rayon moitié moindre. Le secteur de γ' obtenu, soit $\tau M\tau'$, a tous ses points H suffragants à M. Car, la circonférence C de centre H et de rayon HM est intérieure au cercle γ et n'a de commun avec le secteur TMT′ que le

[1] Voir *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris (11 juillet 1910). L'énoncé et la démonstration s'étendent sans difficulté au cas de plusieurs dimensions.

point M. Donc, C ne contient à son intérieur aucun point de P, ni sur son contour aucun, sauf M. L'intérieur du secteur $\tau M \tau'$ est donc suffragant à M. Les M sont bien dénombrables.

Le théorème sur les nombres dérivés va se déduire immédiatement du précédent. $f(x)$ étant une fonction continue, le point $x, y = f(x)$ décrit, x parcourant le segment ab, un ensemble parfait, savoir la courbe C représentative de $f(x)$. Si, en un point x_0, Δ_d est inférieur à δ_g, soient $2p$ la somme de ces nombres et 4ω leur différence, on a $\Delta_d < p - \omega$ et $\delta_g > p + \omega$. On aura d'une part

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < p - \omega$$

dès que $x - x_0$ positif sera inférieur à un certain nombre h_1; d'autre part

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > p + \omega,$$

dès que $x - x_0$ négatif surpassera $-h_2$. Soit h le plus petit des nombres h_1 et h_2. Soit M le point de C ayant pour abscisse x_0. L'angle de sommet M, ayant pour côté gauche TM de pente $p + \omega$, pour côté droit MT′ de pente $p - \omega$ et ouvert dans le sens des y négatifs, angle valant moins de π (exactement $\pi - 2\omega$), contient manifestement tous les points de C intérieurs à la bande $x_0 - h < x_0 + h$ et *a fortiori* au cercle de centre M et de rayon h. Donc, M est un sommet de l'ensemble parfait C. Donc, l'ensemble des points M et celui de leurs projections x_0 sur Ox sont dénombrables. Le changement de x en $-x$ et de f en $-f$ nous donne la même propriété pour l'ensemble des points x, où f vérifie l'inégalité $\Delta_g < \delta_d$.

En particulier, l'ensemble des points où une fonction possède pour chacun des deux côtés une dérivée unilatérale différente, cet ensemble est dénombrable.

Nous énonçons maintenant un théorème fondamental pour cette étude.

Premier Théorème des nombres dérivés (théorème descriptif).

28. P *étant un ensemble parfait continu ou non, s'il existe une infinité d'intervalles* $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ *dont la longueur tend vers zéro, n croissant, dont les extrémités pour un même côté* (gauche, par exemple), $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$: 1° *sont toutes agrégées à* P, 2° *forment un ensemble partout dense sur* P; *si, d'autre part, la variation relative* l_n *de la fonction continue* f *sur* S_n, ou bien *a) reste constamment supérieure à un nombre fixe* k, ou bien *b) reste constamment inférieure à* k, ou bien *c) tend vers une limite unique finie ou infinie* l, *alors, dans ces conditions respectives, l'ensemble des points de* P *où, du côté opposé au premier* (donc droit d'après notre première hypothèse), f *possède a) son dérivé supérieur au moins égal à* k, *b) son dérivé inférieur au plus égal à* k, *c) le nombre* l *pour dérivé médian ou extrême, l'ensemble ainsi défini est partout dense sur* P, *et même c'est un résiduel de* P.

En effet, donnons-nous une suite de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, tendant vers zéro. Pour $x = c_n$, nous avons l'égalité

$$\frac{f(d_n) - f(x)}{d_n - x} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{VR}(f, x, d_n) = t_n.$$

Mais le quotient de différences figurant au premier membre est une fonction continue de x en c_n. Il existe donc un intervalle $c'_n c''_n$ ou σ_n contenant c_n à son intérieur, pouvant toujours être supposé inférieur à ε_n en longueur, et en tout point x duquel le quotient considéré est compris entre $l_n - \varepsilon_n$ et $l_n + \varepsilon_n$. En outre, la valeur du quotient n'étant d'ailleurs pas obligatoirement définie pour $x = d_n$, supposons c''_n entre c_n et d_n. Désignons indifféremment par E l'ensemble défini dans l'énoncé et susceptible de trois acceptions diverses suivant l'hypothèse réalisée par les l_n. Je dis que tout point ξ agrégé à une infinité de σ_n appartient à E. Il faut prouver pour cela que : 1° ξ est agrégé à P, 2° en ξ, f satisfait aux conditions différentielles énoncées. En effet, d'abord la longueur de σ_n étant inférieure à ε_n, et σ_n contenant c_n agrégé à P (les d_n n'ont aucune relation obligée avec P), ξ est un point limite de points de P, donc fait partie de P supposé parfait. D'autre part, si σ_n contient ξ, l'extrémité droite d_n de l'intervalle S_n de même indice que σ_n,

surpasse ξ et en est à une distance inférieure à $\sigma_n + S_n$, σ_n et S_n empiétant l'un sur l'autre. Donc, pour la suite des σ_n contenant ξ, d_n tend vers ξ par valeurs supérieures. Enfin la variation relative $VR(f, \xi, d_n)$ est, pour la même suite de valeurs de n, comprise entre $l_n - \varepsilon_n$ et $l_n + \varepsilon_n$. Donc, toutes ses valeurs limites qui sont des dérivés droits médians ou extrêmes de f en ξ sont comprises dans l'ensemble des valeurs limites de la suite l_n. Si donc a) l_n surpasse k, f possède en ξ un dérivé médian ou extrême au moins égal à k et par suite on a $\Delta_d(\xi) \geqq k$; de même si b) $l_n < k$, $\delta_d(\xi) \leqq k$, et si c) $\lim l_n = l$ fini ou infini, $\delta(\xi) \leqq l_n \leqq \Delta_d(\xi)$.

Tout revient donc à montrer que l'ensemble des points intérieurs à une infinité d'intervalles σ_n est partout dense sur P, et même que c'est un résiduel de P. Établissons par des raisonnements élémentaires la première allégation. Soit ϖ une portion quelconque de P. Prouvons l'existence d'un point de E sur ϖ. a et b étant les points extrêmes de ϖ, soit α un point de ϖ intermédiaire aux précédents. A cause de la densité des c_n, il existe une suite de points c_n tendant vers α. La longueur de σ_n tendant vers zéro quand n croît, nous pouvons trouver un premier point c_n (désigné désormais par γ_1) agrégé à ϖ, en même temps que l'intervalle σ_n correspondant, soit ω_1, est intérieur à ab. ω_1 ayant à son intérieur γ_1 agrégé à P, contient une infinité de points de P. Soit ϖ_1 une portion de P intérieure à ω_1, a_1 et b_1 ses extrémités. Nous y déterminons de même un point c_n, désignons-le par γ_2, dont l'intervalle σ_n, soit ω_2, est intérieur à $a_1 b_1$, et nous continuons indéfiniment selon un progrès évident. Nous établissons ainsi une succession de segments ab, ω_1 $a_1 b_1$, ω_2, ..., $a_m b_m$, ω_{m+1}, ..., chacun intérieur au précédent. a_m et b_m sont les extrémités d'une portion ϖ_m de P intérieure à ω_m. α_m étant un point quelconque de ϖ_m distinct de a_m et de b_m, il existe, à cause de la densité des points c_m, une suite de ces derniers tendant vers α_m. A partir d'un certain rang, les points de cette suite auront leurs intervalles σ_n respectifs intérieurs à $a_m b_m$. Soit γ_{m+1} l'un de ces points et ω_{m+1} son intervalle σ_n. ω_{m+1} contenant un point de P, savoir γ_{m+1}, en contient une infinité; soit ϖ_{m+1} une portion de P formée par ceux-ci et a_{m+1}, b_{m+1} les extrémités de ϖ_{m+1}. Le segment ω_m étant intérieur à ω_{m-1} et doué d'une longueur infiniment petite quand son indice croît, tend vers un

point ξ intérieur à lui pour toute valeur de m, et, comme nous l'avons vu, agrégé à ϖ. Donc, l'ensemble E possède au moins un point dans toute portion ϖ de P. H est partout dense sur P. Mais notons que, seules les *valeurs limites* de l_n intervenant pour borner Δ_d ou δ_d dans les cas a) et b), il est possible de substituer, aux hypothèses respectives $l_n > k$ ou $l_n < k$, celles-ci moins restrictives : *les l_n n'admettent point de limite inférieure* (cas a), ou *supérieure* (cas b) *à k*.

29. Montrons maintenant que E est un résiduel de P. En effet, les σ_n étant définis comme plus haut, considérons l'ensemble H_0 des points de P non intérieurs à $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$. Cet ensemble est évidemment fermé puisqu'un point étranger à H_0, étant intérieur à un intervalle σ_n totalement étranger à H_0, ne peut pas être point limite de cet ensemble. Je dis que H_0 est non dense sur P. Dans le cas contraire, il existerait une portion ϖ de P dont H_0 posséderait tous les points. Or, l'ensemble c_n étant dense sur P, il existe, entre les points extrêmes a et b de ϖ, au moins un point c_n. L'intervalle σ_n correspondant, renfermant c_n, contient de ϖ toute une portion dont aucun point intérieur ne fera partie de H_0. Donc, H_0 est non dense sur P. Mais ce raisonnement est fondé sur ce que l'ensemble $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ est partout dense sur P. Si nous supprimons un nombre limité de points c_n, cet ensemble ne cesse pas d'être dense. Soit donc H_p l'ensemble des points de P non intérieurs à $\sigma_{p+1}, \sigma_{p+2}, \ldots$. H_p, qui contient H_{p-1} est non dense sur P (et d'ailleurs fermé). Considérons l'ensemble H réunissant $H_1, H_2, \ldots, H_p, \ldots$. H est gerbé sur P. Soit G le résiduel de P complémentaire de H. Tout point M de G est intérieur à une infinité d'intervalles σ_n. Car, si ce point M était intérieur seulement à un nombre limité d'entre eux, le plus grand des indices de ceux-ci aurait une certaine valeur p. M appartiendrait à tous les ensembles $H_{p+1}, H_{p+2}, \ldots$, donc à H et non pas à G. Donc M est agrégé à l'ensemble E qualifié dans l'énoncé. Donc E contient G. Donc E est un résiduel de P.

30. Examinons plus particulièrement l'hypothèse c) et désignons par $E_d(l)$ l'ensemble des points de P où l est un dérivé droit (médian ou extrême) de f. Une conséquence essentielle pour l'ensemble $E_d(l)$ de sa propriété d'être un résiduel de P est que tout ensemble de même

nature a nécessairement avec lui une infinité de points communs formant eux aussi un résiduel de P, et même celle-ci qu'une infinité dénombrable d'ensembles analogues à $E_d(l)$ ont en commun une infinité dense de points formant encore un résiduel. Nous pouvons d'ailleurs voir directement que : si nous avons deux ensembles c_n, g_n partout denses sur P, extrémités chacun pour un côté unique (identique ou différent pour l'un et l'autre) de deux familles d'intervalles correspondants S_n, T_n, les c_n étant par exemple tous extrémités gauches des S_n, les g_n étant tous extrémités droites des T_n, les variations relatives l_n de f sur S_n, q_n de f sur T_n tendant respectivement vers l et q, quand n croît, les longueurs de S_n et de T_n tendant vers zéro en même temps ; moyennant ces hypothèses, il existe sur P un ensemble partout dense où simultanément l est un dérivé médian ou extrême droit et q un dérivé extrême ou médian gauche. Il suffit, après avoir défini des intervalles τ_n analogues aux σ_n et construits pour l'ensemble (g_n, T_n), de reprendre les raisonnements du numéro **28**, en les appliquant alternativement à la suite c_n et à la suite g_n. Nous envisageons une succession de segments ab, ω_1, $a_1 b_1$, $\upsilon_2 \ldots$, $a_{2m-1} b_{2m-1}$, υ_{2m}, $a_{2m} b_{2m}$, ω_{2m+1}, $a_{2m+1} b_{2m+1}$, ..., chacun inclus dans le précédent, les υ_{2m} étant choisis parmi les τ_n comme les ω_{2m+1} le sont parmi les σ_n, a_p, b_p étant les extrémités d'une portion ϖ_p de P intérieure à ω_p ou à υ_p selon que p est pair ou impair. La possibilité de déterminer cette suite résulte de la présence sur toute portion de P, des ensembles c_n et g_n séparément. Les portions ϖ_p ont en commun un point ξ agrégé à P, intérieur à une infinité de σ_n, à une infinité de τ_n et où, par suite, f admet les dérivés l droit et q gauche. L'ensemble des points communs à $E_d(l)$ et à $E_g(q)$, où respectivement f a pour dérivé droit l et pour dérivé gauche q, est donc bien partout dense sur P. Les dérivés peuvent être médians ou extrêmes, sans autre précision possible en général.

Il est inutile d'envisager une infinité dénombrable d'ensembles de points analogues à l'ensemble c_n. Si l'on connaît, en effet, une infinité dénombrable de quantités analogues à l, dont chacune est limite des variations relatives de f sur une suite d'intervalles pareils à S_n, à extrémités gauches situées comme les c_n sur P et partout denses sur lui, ces quantités ont deux bornes supérieures et inférieures (finies ou infinies), L et L'. Mais, quel que soit n et l'infiniment petit positif ε_n,

il est visible, d'après nos hypothèses, qu'il existe sur toute portion de P assignée d'avance un point C_n extrémité gauche d'intervalle inférieur à ε_n et où la variation relative surpasse $L - \varepsilon_n$. Les C_n peuvent donc être répartis densément sur P. Il en résulte que l'ensemble $E_d(L)$ est partout dense sur P et est même un résiduel. L'ensemble $E_d(L')$ jouit également de ces propriétés. Donc, en un résiduel R de P, L et L' sont des dérivés médians ou extrêmes droits. Mais alors, en tout point de R, tout nombre intermédiaire à L et à L' est un dérivé médian droit de f. Nous n'obtenons donc rien de plus en considérant une infinité dénombrable d'ensembles de points c_n et d'intervalles S_n relatifs à une infinité dénombrable de nombres limites analogues à l, les c_n étant toujours des extrémités gauches des S_n, qu'en nous bornant à envisager deux ensembles de points et intervalles, faciles à former au moyen des premiers, et ayant trait aux bornes supérieures et inférieures des l.

Pareillement, si les ensembles associés (K) analogues à (c_n, S_n) avec des c_n extrémités des S_n pour un même côté, mais droit ou gauche selon l'ensemble (K), donnent chacun des variations relatives de f sur S_n tendant vers une limite propre pour n infini, il est superflu, pour obtenir les conclusions optimum de ces données, d'envisager plus de quatre ensembles (K), deux au plus pour chaque côté.

Applications du Premier Théorème.

Les applications du Premier Théorème fondamental seront très nombreuses au cours de ce Mémoire. En voici les principales.

31. l_n étant un nombre défini sur l'intervalle $c_n d_n$ ou S_n, infiniment bref pour n infini (l_n étant plus précisément dans ce paragraphe la variation relative de f sur S_n), convenons de dire que *l'ensemble* l_n *admet en un point* M *de* P *la valeur limite* λ finie ou infinie, s'il existe une suite choisie parmi les c_n et tendant vers M de manière que les nombres l_n tendent en même temps vers λ.

Les points de P analogues à M, où l'ensemble l_n admet la valeur limite λ, forment évidemment un ensemble fermé. Supposons ce dernier coïncidant avec P. Quel que soit ε, il est possible de trouver, si

près que l'on veut d'un point M quelconque de P, un point c_n tel que, pour le même indice n, l_n diffère de λ de moins de ε, si λ est fini (soit du signe de λ et surpasse $1 : \varepsilon$ en valeur absolue si λ est infini). En choisissant sur P une suite M_p partout dense sur P (par exemple l'ensemble énuméré des points de première espèce de P) et, parmi les points c_n, l'un d'eux, soit γ_p, distant de M_p de moins de ε_p (infiniment petit positif quelconque) et donnant pour le nombre l_n de même indice une valeur λ_p différant de λ de moins de ε_p, si λ est fini (surpassant p en valeur absolue et du signe de λ, si λ est infini), il est visible que les γ_p sont denses sur P et que λ_p tend vers λ. Le Premier Théorème nous permet immédiatement de conclure :

Application I. — *S_n étant un intervalle infiniment bref quand n croît, et dont l'extrémité gauche* (droite) *décrit un ensemble partout dense sur l'ensemble parfait* P, *si la variation relative l_n de f sur S_n admet en tout point de* P *la valeur limite λ, finie ou infinie, λ sera un dérivé médian ou extrême droit* (gauche) *de f en tout point d'un résiduel de* P.

Quand λ est $+\infty(-\infty)$, nous disons que l_n est *non bornée supérieurement* (inférieurement) dans toute portion de P ou au voisinage de tout point de P. Dans ce cas, *f admet le dérivé supérieur* (inférieur) *droit $+\infty(-\infty)$ en un résiduel de* P.

32. Application II. — *Si l'ensemble $E_d(l)$ des points où f a pour dérivé médian ou extrême droit un nombre l est partout dense sur* P, *cet ensemble est un résiduel de* P.

$E_d(l)$ étant partout dense sur P, nous pouvons en extraire une infinité dénombrable de points $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, partout denses sur P, d'après ce principe facile à vérifier [1] qu'il est toujours possible

[1] Il suffit naturellement de prouver cette assertion pour un ensemble borné puisqu'un ensemble non borné est la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles bornés. Si donc l'ensemble E est sur le segment ab, divisons ce dernier en n segments égaux et sur chacun de ceux qui contiennent au moins un point de E, choisissons indifféremment un de ceux-ci. L'ensemble des points élus pour toutes les valeurs de n est évidemment dénombrable, possède les mêmes points limites que E et en contient tous les points isolés. La démonstration s'étend immédiatement au cas des ensembles à plusieurs dimensions.

d'extraire d'un ensemble quelconque un ensemble dénombrable ayant même dérivé que lui (et même, de plus, contenant tous ses points isolés, lesquels sont en infinité dénombrable). Soit $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, la suite des points de cet ensemble. l étant en c_n un dérivé droit, il existe un intervalle $c_n d_n$ d'extrémité gauche c_n, de longueur inférieure à ε_n (infiniment petit positif indépendant) et où la variation relative de f diffère de l de moins de ε_n, si l est fini, est du signe de l et supérieure en valeur absolue à n, si l est infini. Nous sommes dans les conditions d'application du théorème fondamental. L'ensemble $E_d(l)$ est donc partout un résiduel.

Sont donc des résiduels sur P, dès qu'ils sont partout denses sur P, les ensembles où zéro est un dérivé médian d'un côté, où f a son dérivé supérieur infini positif pour un côté donné, son dérivé inférieur pour un côté déterminé infini négatif. Mais ce serait une erreur de croire que dans l'hypothèse où la dérivée droite existe et vaut $+\infty$ en un ensemble partout dense sur P, cet ensemble est un résiduel. Non, tout ce qu'on peut conclure de cette hypothèse d'après le Premier Théorème, c'est que l'ensemble des points où l'un des dérivés droits (et forcément le dérivé supérieur) est $+\infty$, cet ensemble est un résiduel. Mais rien n'exige qu'en tous les points de cet ensemble le dérivé inférieur droit soit lui aussi $+\infty$. Il faudrait pour cela supposer de plus qu'il existe en tout point une dérivée droite.

55. Nous déduirons immédiatement de ce qui précède la proposition suivante :

Les points où un dérivé supérieur (ou inférieur) *de côté déterminé est infini positif* (ou négatif), *forment un ensemble ou bien non dense sur tout ensemble parfait, s'il est dénombrable, ou bien contenant un ensemble parfait, s'il est non dénombrable.*

Soit par exemple à étudier l'ensemble $E_d(+\infty)$ où le dérivé supérieur droit est $+\infty$, et que nous désignerons pour abréger par D. Nous utiliserons deux résultats généraux de la théorie des ensembles, établis l'un et l'autre dans la Note II : 1° tout résiduel d'un ensemble parfait contient lui-même un ensemble parfait; 2° un ensemble non dénombrable est dense sur l'ensemble parfait constitué par les points

au voisinage desquels il est non dénombrable. Cela posé : 1° si D est dénombrable, il n'est dense sur aucun ensemble parfait, car s'il était dense sur l'un d'eux P et par suite partout dense sur une portion ϖ de P, il contiendrait un résiduel de ϖ, donc un ensemble parfait; il ne serait donc pas dénombrable; 2° si D est non dénombrable, soit Q l'ensemble parfait constitué par les points au voisinage desquels D est non dénombrable. D est partout dense sur Q. Donc, il en contient un résiduel et par suite un ensemble parfait. C. Q. F. D.

Le même énoncé vaudrait si D était l'ensemble où un dérivé médian ou extrême de f prend une même valeur α (¹).

54. Application III. — *Si une fonction admet pour un même côté une dérivée unique en chaque point, il est impossible que les deux ensembles où cette dérivée est l pour le premier, l' pour le second soient l'un et l'autre denses sur un même ensemble parfait.*

Sinon, l et l' seraient sur un même résiduel dérivés médians ou extrêmes pour le côté considéré. Il n'y aurait donc pas de ce côté une dérivée unique en tout point.

Un emploi essentiel du Premier Théorème est de démontrer la non-densité sur un ensemble parfait P de certains ensembles c_n, éléments d'une association du type (c_n, S_n), moyennant l'hypothèse de l'absence sur P de certains dérivés unilatéraux de valeur finie ou infinie donnée.

55. Application IV. — *Si le dérivé supérieur d'une fonction pour un côté donné est fini en chaque point, sur tout ensemble parfait* P *continu ou discontinu, l'ensemble des points au voisinage desquels*

(¹) *Voir* la Note 2 au sujet de la décomposition de tout ensemble en deux, l'un dense en lui-même (*noyau*), l'autre non dense sur tout ensemble parfait (*ensemble clairsemé*). D'après le théorème de M. Baire, les raisonnements faits ci-dessus pour l'ensemble D s'étendent à tout ensemble E où une fonction f *de classe un* prend une même valeur donnée α. Si, en effet, E est dense sur un ensemble parfait P, l'ensemble $f \neq \alpha$ est gerbé sur P. Donc E est un résiduel de P; il contient par conséquent un ensemble parfait. Donc l'*ensemble* $f = \alpha$ *ou bien est clairsemé et par suite dénombrable ou bien renferme un ensemble parfait.*

ce même dérivé est non borné supérieurement est non dense sur P.

Rappelons les définitions suivantes : une fonction φ est dite *bornée en un point* M *sur un ensemble* E continu ou non, mais dont M est un point limite, quand M est intérieur à un intervalle i tel que les *valeurs absolues* prises par φ aux points de E situés dans i sont inférieures à un même nombre. Si l'on veut simplement que φ soit une fonction *bornée supérieurement* (inférieurement) sur E en M, l'ensemble des valeurs positives (négatives), seules considérées, prises par φ sur E doit être inexistant ou borné. Si donc φ est non borné (ou non borné supérieurement) sur E en M, où φ peut néanmoins avoir toujours une valeur numérique finie, c'est que la circonstance suivante se produit : si petit que soit un intervalle contenant M, il y a sur lui des points de E où la valeur absolue (ou simplement la valeur elle-même) de φ surpasse l'entier n, quel que soit n. Il existe alors une suite de points $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$, agrégés à E, tendant vers M, et tels que la suite $\varphi(M_n)$ ait pour points limites $+\infty$ ou $-\infty$, ou l'un et l'autre (au moins le premier pour les fonctions non bornées supérieurement).

L'ensemble des points d'un ensemble parfait P (continu ou discontinu) au voisinage desquels φ est non borné sur P, est évidemment fermé. Si donc un tel ensemble est dense sur P, il contient une portion ϖ de P. Mais alors, sur toute portion ϖ' de ϖ existe, quel que soit A, un point x de P où $|\varphi(x)| > A$, et plus précisément $\varphi > A$, s'il s'agit exactement d'une fonction φ non bornée supérieurement. Restons dans cette dernière hypothèse. Si alors φ est un dérivé droit de f, f a donc un dérivé droit infini positif aux points d'un ensemble partout dense et même résiduel sur P. Donc, en supposant φ partout fini, nous aboutissons à une contradiction [1].

On obtient des théorèmes analogues pour les fonctions à dérivé supérieur gauche non borné supérieurement sur un ensemble parfait P et pour les fonctions à dérivé inférieur gauche ou droit non bornés inférieurement. L'ensemble des points de P où le dérivé considéré

---

[1] *Voir* MONTEL, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, p. 109, et la note au bas de cette page; également *Comptes rendus*, 23 décembre 1912.

est non borné (supérieurement ou inférieurement selon les cas) est non dense sur P. En particulier, *si une fonction admet partout une dérivée finie pour un même côté*, droit par exemple, *l'ensemble des points au voisinage desquels cette dérivée n'est pas bornée est non dense sur le continu. L'ensemble des points d'un ensemble parfait quelconque* P *où les valeurs prises par elle sur* P *ne sont pas bornées est non dense sur* P.

En effet, cette dérivée φ coïncide en chaque point avec les dérivés inférieur et supérieur droits de f. Or, l'ensemble e des points de P au voisinage desquels φ n'est pas borné sur P est la réunion de deux ensembles (pouvant d'ailleurs coïncider en tout ou partie) e_s et e_i constitués respectivement par les points où φ n'est pas borné supérieurement pour le premier, inférieurement pour le second. Si e est dense sur P, il en est de même de l'un au moins des deux ensembles e_s et e_i. Si c'est le premier, le dérivé supérieur droit de f sur un résiduel d'une portion de P est $+\infty$, et, comme f a partout par hypothèse une dérivée droite finie, nous aboutissons à une contradiction, comme on en trouverait une si e_i était dense sur P.

Encore plus particulièrement, *si f admet partout une dérivée finie φ* (donc une dérivée unique de chaque côté et la même pour les deux côtés), *sur tout ensemble parfait* P, *l'ensemble des points de* P *au voisinage desquels φ est non borné sur* P, *est non dense sur* P. Ce résultat jouera un rôle fondamental dans la dernière Partie de ce Mémoire [1].

---

[1] Cette proposition découle très simplement, comme celle du n° III, du théorème de M. Baire sur les fonctions limites de fonctions continues ou de classe *un*, ainsi que la suivante : Si, sur un ensemble parfait P, il existe un ensemble dénombrable et partout dense c_n où les valeurs φ de la dérivée (supposée existante en tout point) d'une fonction continue f tendent vers une limite l, l'ensemble des points où $\varphi = l$ est un résiduel sur P, et celui où φ diffère de l d'une quantité supérieure à un nombre positif quelconque α est non dense sur P.

Cet énoncé est bien visiblement inclus dans les théorèmes ci-dessus démontrés. Les deux ensembles $\varphi = l$ et $|\varphi - l| > \alpha$ ne peuvent pas, nous l'avons dit, être simultanément denses sur un même ensemble parfait P.

Rappelons que, d'après le théorème de M. Baire, sur un ensemble parfait quelconque P, l'ensemble des points de continuité (relativement à P) d'une

56. Une différence importante est à signaler entre le cas du continu et celui d'un ensemble parfait discontinu [1]. Si une famille d'intervalle S_n tendant vers zéro en longueur ont leurs extrémités gauches c_n

---

fonction de classe un est partout dense sur P, ou que l'ensemble des points où l'oscillation (relativement à P) de la fonction surpasse un nombre positif quelconque est non dense sur P. D'après ceci, le premier est un résiduel de P. Mais notre étude fournit en plus des résultats essentiels sur les nombres dérivés médians ou extrêmes, lesquels ne sont pas, comme les dérivées, des limites de fonctions continues, et ne peuvent donc pas donner lieu à une application du théorème de M. Baire.

[1] La continuité ou la discontinuité d'un ensemble parfait P où sont étudiés des nombres dérivés constituent deux cas bien distincts. Montrons-le par des exemples :

1° Si une fonction possède en tout point d'un segment continu ab un nombre dérivé positif (Δ_d ou Δ_g) pour un côté invariable, elle est croissante sur ab (démonstration analogue à celle des n°s 48 et 48bis). Mais nous réaliserons (**60** et **61**) des fonctions nulles sur un même ensemble parfait discontinu P et admettant en chaque point de celui-ci le dérivé droit $+\infty$. L'excès de l'une de ces fonctions sur x sera partout décroissant sur P, avec cependant le dérivé droit $+\infty$ en tout point de P.

2° Supposons qu'une fonction f ait en tout point de P *tous ses dérivés droits positifs* ($\delta_d > 0$). En résultera-t-il que f soit croissante sur P? Nullement. f est dite croissante sur P, rappelons-le, dès qu'elle est croissante de tout point de P à tout point de P, sauf le cas où ces points sont simultanément extrémités d'un même contigu, et où une variation nulle et non pas nécessairement positive de f est admise entre ces deux points. Disons qu'elle est *totalement croissante* sur P, si la restriction de la définition précédente est supprimée. D'après le Premier Théorème, les points N de P au voisinage desquels existent des couples x, x' agrégés à P et entre lesquels f n'a pas une variation positive, ces points N forment un ensemble K non dense sur P (et d'ailleurs fermé). Sinon l'inégalité $\delta_d < 0$ serait vérifiée en un résiduel de P. Le lecteur verra sans peine que, dans tout contigu u à K contenant des points de P, ceux-ci se répartissent en un nombre limité ou une infinité dénombrable de portions de P, sur chacune desquelles f est totalement croissante, n'ayant d'autres points d'accumulation, si elles sont en infinité, que les extrémités de u, deux à deux sans points communs, donc séparées les unes des autres par des intervalles contigus à P. f ayant une variation non positive sur chacun de ces derniers contigus. C'est là tout ce que permet de conclure de plus général l'hypothèse $\delta_d > 0$, vérifiée en tout point de P. On voit quel degré de liberté la discontinuité de P laisse à f qui serait croissante sur le continu avec la seule hypothèse $\Delta_d > 0$.

partout denses sur le continu, elles ont également leurs extrémités droites d_n partout denses. Si donc la variation relative de f sur S_n tend vers une limite l pour n infini, f possède de chaque côté l pour dérivé médian aux points de deux résiduels respectifs, donc simultanément aux points d'un même résiduel, constitué par l'ensemble commun aux deux précédents.

En particulier, si les points où le dérivé supérieur droit est $+\infty$ forment un ensemble partout dense, il en est de même des points où le dérivé supérieur gauche est $+\infty$, et il y a une infinité dense (et même résiduelle, comme toujours) de points où les dérivés supérieurs sont de chaque côté $+\infty$. Cette conclusion est à rapprocher d'une propriété connue des quatre dérivés extrêmes d'une fonction continue, savoir que le maximum et le minimum de ces quatre nombres dans un même intervalle coïncident. On le prouve en remarquant que la variation relative d'une fonction continue non linéaire f entre deux points quelconques a et b est certainement surpassée par chacun des dérivés inférieurs et surpasse chacun des dérivés supérieurs en certains points intérieurs à ab. Soient en effet (LI, p. 70) M un point figuratif de f d'abscisse comprise entre a et b, mais étranger au segment AB joignant les affixes correspondants à a et b; D une droite intermédiaire à M et à AB et parallèle à ce dernier segment; P, P′, Q′, Q les points communs à la courbe x, $f(x)$ et à D rencontrés sur la courbe en allant de A à B, et caractérisés respectivement ainsi : le premier en venant de A, le dernier avant M, le premier après M, le dernier avant B. En supposant M au-dessus de AB, et désignant par v le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, en P les dérivés gauches, en P′ les dérivés droits sont au moins égaux à v; en Q′ les dérivés gauches, en Q les dérivés droits sont au plus égaux à v. Et même les pentes de AM et de BM comprenant entre elles v (p. 213), certainement pour chaque côté sur l'arc AB, en des points divers, les dérivés δ_d, δ_g surpassent v, Δ_d, Δ_g sont inférieurs à v, l'égalité étant exclue. La démonstration serait analogue si M était au-dessous de AB.

De là résulte bien que si le dérivé supérieur droit, par exemple, est $+\infty$ en un ensemble partout dense, le maximum des trois autres dérivés extrêmes est $+\infty$ en tout point. Mais il faut faire appel au théorème fondamental pour en conclure que le dérivé supérieur

gauche est $+\infty$ en un ensemble dense et de plus résiduel, donc qu'il y a en un ensemble dense et même résiduel les deux dérivés $+\infty$ de chaque côté. Enfin, de ce que les dérivés inférieurs ont pour maximum en tout point $+\infty$, toujours dans la même hypothèse de la densité de $E_d(+\infty)$, il serait illégitime de prétendre s'appuyer sur le théorème fondamental pour en conclure que ces dérivés inférieurs sont eux aussi $+\infty$ en un ensemble dense. De ce qu'un dérivé inférieur droit a pour maximum en tout point $+\infty$, nous concluons seulement à l'existence, sur un résiduel, du dérivé droit $+\infty$. Il est évident que, partout où celui-ci existera, il sera le dérivé supérieur, mais rien ne prouve et, en général, ce serait faux, qu'il soit en même temps le dérivé inférieur en aucun point.

En tout cas remarquons que toutes les fonctions φ égales à l'un quelconque des dérivés médians *pour un côté invariable* ont en tout point même maximum et même minimum; car ces nombres sont compris entre les nombres analogues relatifs aux dérivés supérieurs et inférieurs pour le côté considéré, lesquels coïncident dans tout intervalle. Mais il serait inexact, comme nous le verrons, de prendre pour φ en chaque point un dérivé médian ou extrême pour un côté indifférent. Nous trouverons, en effet, des fonctions non constantes admettant le dérivé médian zéro en tout point pour un côté au moins (p. 222).

56 *bis*. Remarquons enfin que, s'il s'agissait non pas du continu, mais d'un ensemble parfait P quelconque, rien n'obligerait (nous en verrons des exemples) les dérivés médians ou extrêmes d'un côté à prendre une valeur donnée, finie ou infinie sur un résiduel de P, sous la seule condition que cette valeur soit un dérivé médian ou extrême pour l'autre côté sur un résiduel de P. En effet, si, par exemple, le premier côté est le droit et l le dérivé médian droit constant sur un résiduel de P, il y a bien une infinité d'intervalles S_n à longueurs infiniment petites avec $\frac{1}{n}$, d'extrémités gauches partout denses sur P et où la variation relative de f tend vers l. Mais rien n'oblige les extrémités droites des S_n à être elles aussi sur P. Donc aucune conclusion pour le côté gauche n'est possible *a priori*. Il y a cependant deux sortes de cas où les S_n ont leurs deux extrémités sur P, et où la connaissance de conditions remplies par les dérivés de f pour un même côté déter-

miné en tous les points d'un ensemble parfait discontinu, permet d'en conclure certaines particularités pour les dérivés du côté opposé. L'un des cas, que nous examinerons le second, est celui où l'on fait expressément cette hypothèse concernant les S_n, par exemple en prenant pour S_n les intervalles contigus à P (application V ci-dessous). L'autre est celui où, du premier côté, on suppose l'existence d'*une dérivée* égale à un nombre fixe, fini ou infini, ou encore plus généralement l'existence de deux limites finies, ou simplement d'une seule bornant les dérivés du premier côté.

L'application du théorème du n° **27** nous fournit une première conclusion importante pour l'autre côté. Soit, par exemple, parmi les points de P, E l'ensemble de ceux où l est une dérivée unilatérale droite (hypothèse a). En tous les points de E, sauf éventuellement en ceux d'un ensemble dénombrable, l est un dérivé médian ou extrême gauche. De même, si en chaque point de E (dont nous ne considérons que les éléments agrégés à P), tous les nombres dérivés droits sont (b) compris entre L et L′ ($L < L'$) ou seulement (c) inférieurs à L′ ou seulement (d) supérieurs à L, dans chacun des cas respectifs précédents, en tout point de E, exception faite éventuellement d'un ensemble dénombrable, on aura (b) le dérivé supérieur gauche plus grand que L et le dérivé inférieur gauche moindre que L′, ou seulement (c) la seconde ou seulement (d) la première de ces deux conclusions.

En particulier, si E contient P, si donc en tout point de P, l'une des hypothèses a, b, c et d est vérifiée, les conclusions correspondantes seront vérifiées non seulement en un résiduel de P, mais encore sur un ensemble ne différant de P que par une exception dénombrable. Par exemple, si en tout point de P, on a une dérivée droite infinie positive, les points de P où le dérivé supérieur gauche n'est pas $+\infty$, font un ensemble dénombrable. Nous formerons d'ailleurs des ensembles de cas où, avec une dérivée droite infinie en tout point d'un ensemble parfait (mince) P, une fonction ne possédera pas de dérivée gauche sur cet ensemble.

Supposons maintenant que l'une des hypothèses a, b, c, d soit vérifiée dans un ensemble E dense sur P, E ne contenant aucun point de première espèce gauche de P, donc tout point de E étant limite de points de P situés à sa droite. Je dis que les conclusions énumé-

rées ci-dessus pour le côté gauche et correspondant à ces hypothèses respectives sont vraies sur un résiduel de P. Plaçons-nous, par exemple, dans la première hypothèse, des raisonnements tout pareils convenant aux autres cas.

Supposons en effet que du côté droit, sur l'ensemble E, f possède en tout point une dérivée égale à l, ce dernier nombre étant fini ou infini, positif ou négatif. Alors tout point M de E est extrémité gauche d'un intervalle MM′ tel qu'entre M et tout point de cet intervalle, la variation relative de f diffère de l d'une quantité inférieure à un nombre ε (expression à modifier comme il a été souvent expliqué, si l est infini). Mais, si M est limite du côté droit de points de P, autrement dit, si M n'est pas extrémité gauche d'intervalles contigus à P, nous pouvons trouver sur MM′ des points M_1 de P aussi voisins de P qu'on le voudra. M_1 est alors l'extrémité droite d'un certain intervalle MM_1 sur lequel la variation relative de f diffère de l de moins de ε. Notre hypothèse de l'existence de la dérivée droite l étant admise en tout point de E, le lecteur n'aura aucune difficulté à prouver la possibilité d'établir un ensemble partout dense sur P de points g_n extrémités droites d'intervalles T_n infiniment petits pour n infini, où la variation relative de f diffère de l de moins de $\frac{1}{n}$. On peut donc conclure à coup sûr de notre hypothèse l'existence en un résiduel de P du dérivé gauche médian ou extrême l.

Des développements analogues aux précédents justifient un énoncé tel que celui-ci : *E étant un ensemble agrégé à* P, *dense sur* P *et ne contenant aucun point de première espèce de* P, *si, en tout point de* E, *le dérivé inférieur pour l'un au moins des côtés surpasse* L, *alors en tout point d'un résiduel de* P, *les dérivés supérieurs des deux côtés valent au moins* L.

De même, *si, en tout point d'un ensemble* E′ *partout dense sur* P *et formé de points de seconde espèce, l'un au moins des deux dérivés supérieurs est moindre que* L′, *en tout point d'un résiduel de* P, *les deux dérivés inférieurs sont au plus égaux à* L′. Ces deux énoncés ne constituent un progrès réel que si E et E′ sont dénombrables, auquel cas le théorème du n° **27** ne fournit aucun secours.

Faisons maintenant l'hypothèse expresse que les S_n ont leurs deux extrémités sur P. C'est le cas du théorème suivant, extrêmement

important et qui nous permet de conclure, en partant de l'existence de nombres dérivés partout finis sur P, à des propriétés remarquables pour les variations de f dans les contigus à P. Cette proposition est encore une conséquence immédiate du Premier Théorème.

57. Application V. — *Si les variations relatives de la fonction continue f sur les intervalles contigus à* P *admettent, en tout point de* P, *la valeur limite l finie ou infinie, l est un dérivé médian droit et gauche en tous les points d'un résiduel de* P. Ou encore, *si, au voisinage de tout point de* P, *certaines des mêmes variations relatives surpassent* (sont inférieures à) *un nombre fixe k, les dérivés supérieurs* (inférieurs) *de chaque côté en tous les points d'un résiduel sont au moins* (au plus) *égaux à k.*

58. (Très important.) *Si les dérivés extrêmes de f sur* P *sont finis en chaque point, les points de* P *au voisinage desquels les variations relatives de f sur les contigus à* P *ne sont pas bornées forment un ensemble non dense sur* P. En effet, dans le cas où l'ensemble de ces points serait dense, f posséderait de chaque côté des dérivés infinis sur un résiduel de P. On voit même qu'il est possible de maintenir la conclusion de ce dernier énoncé en restreignant l'hypothèse à l'existence en tout point, *au moins pour un côté*, d'un couple fini de dérivés extrêmes, côté pouvant d'ailleurs changer d'un point à un autre.

Ce théorème nous permettra, comme il est facile de le pressentir, d'entreprendre l'étude de la variation de f entre deux points quelconques d'un ensemble parfait P, connaissant les variations de f dans tous les intervalles contigus à P et, sur P, la valeur de dérivés extrêmes supposés finis. Nous donnerons encore deux autres énoncés trouvant leur application dans les cas où l'on sait l'inexistence sur un ensemble parfait de dérivés infinis d'un signe donné pour un certain côté (VI) ou simplement l'inexistence de dérivés infinis pour l'un au moins des côtés (VII).

59. Appelons *variation relative supérieure de f dans ab au delà de a* le maximum de la variation relative de f entre a et x,

$\mathrm{VR}(f, a, x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pour les valeurs de x *comprises entre* a *et* b. Nous désignerons ce nombre par $\mathrm{VR}_s(f, a, ab)$, en supprimant même la lettre f s'il n'y a pas de confusion possible et ab pouvant être remplacé par toute autre désignation du segment ab. Le minimum du même quotient sera appelé la *variation relative inférieure de* f *dans* ab *au delà de* a et désignée par $\mathrm{VR}_i(f, a, ab)$. Entre ces deux nombres sont les *variations relatives médianes*, valeurs du quotient $\mathrm{VR}(f, a, x)$ en un point quelconque x du segment ab. On définit de même les *variations relatives supérieure* et *inférieure de* f *dans* ab *en deçà de* b comme étant respectivement le maximum et le minimum de $\mathrm{VR}(f, x, b)$ dans ab. Nous les désignerons par $\mathrm{VR}_s(f, ab, b)$ et $\mathrm{VR}_i(f, ab, b)$. La variation relative de f dans ab est une variation relative médiane ou extrême de f dans ab à la fois au delà de a ou en deçà de b. On démontre sans peine l'énoncé suivant, où u_n, savoir $a_n b_n$, désigne l'un des éléments dénombrés de l'ensemble des contigus à P.

Application VI. — *Si le dérivé supérieur droit de* f *n'est* $+\infty$ *en aucun point de l'ensemble parfait* P, *les points de* P *au voisinage desquels* $\mathrm{VR}_s(f, a_n, u_n)$ *n'est pas borné supérieurement forment un ensemble non dense.*

Et encore, écrivons les quatre lignes suivantes :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D} = \Delta_d < +\infty, && \mathrm{VR}_n = \mathrm{VR}_s(f, a_n, u_n);\\
&\mathrm{D} = \delta_d > -\infty, && \mathrm{VR}_n = \mathrm{VR}_i(f, a_n, u_n);\\
&\mathrm{D} = \Delta_g < +\infty, && \mathrm{VR}_n = \mathrm{VR}_s(f, u_n, b_n);\\
&\mathrm{D} = \delta_g > -\infty, && \mathrm{VR}_n = \mathrm{VR}_i(f, u_n, b_n).
\end{aligned}$$

D, inférieur à $+\infty$, signifie : D fini ou infini négatif; D, supérieur à $-\infty$, signifie : D fini ou infini positif. Alors, si D et VR_n ont simultanément les acceptions indiquées sur l'une quelconque des quatre lignes, quand l'inégalité concernant D est vraie en tout point de P, on conclut à la non-densité sur P de l'ensemble des points de P au voisinage desquels les VR_n ne sont pas bornés dans le sens indiqué par leurs indices s ou i. Prenons par exemple la troisième ligne. On a le résultat suivant : *Si le dérivé supérieur gauche est, en tout point*

d'un ensemble parfait P, *fini ou infini négatif, dans toute portion* ϖ *de* P, *il est possible de définir une autre portion* ϖ', *telle que, pour tout intervalle* u_n *ou* $a_n b_n$ *contigu à* ϖ', *la variation relative supérieure de* f *sur* u_n *en deçà de* b_n *est inférieure à un même nombre fixe* A. Quel que soit u_n contigu à ϖ' et γ_n intérieur à u_n, on aura donc

$$f(b_n) - f(\gamma_n) < A(b_n - \gamma_n).$$

40. Appelons *oscillation relative* de f sur ab la plus grande valeur de $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{b - a}$, α et β étant sur ab. α et β sont respectivement des points de ab où f atteint son minimum et son maximum. Ce nombre $\mathrm{OR}(f, ab)$ est positif si f n'est pas constant entre a et b. OR est au moins égal à la valeur absolue de la variation relative de f entre a et b. D'autre part, on a

$$\mathrm{O}(f, ab) = f(\beta) - f(\alpha) = [f(\beta) - f(a)] + [f(a) - f(\alpha)],$$

les deux différences du dernier terme étant d'ailleurs positives ou nulles d'après les inégalités $f(\alpha) \leqq f(a) \leqq f(\beta)$. La plus grande de ces différences surpasse la moitié de $\mathrm{O}(f, ab)$. Il y a donc un nombre γ, savoir soit α, soit β, tel que $2|f(\gamma) - f(a)| > \mathrm{O}(f, ab)$ et par suite

$$2\frac{|f(\gamma) - f(a)|}{\gamma - a} > \mathrm{OR}(f, ab).$$

Donc l'une au moins des variations relatives extrêmes (supérieure ou inférieure) de f dans ab au delà de a surpasse en valeur absolue la moitié de $\mathrm{OR}(f, ab)$. Il en est de même de l'une au moins des variations relatives extrêmes de f dans ab en deçà de b. De là, ce théorème que nous utiliserons par la suite.

Application VII. — *Si pour un côté au moins (constant ou variable) les dérivés extrêmes de* f *en tout point de* P *sont finis, l'ensemble* K *est non dense sur* P, *des points de* P *au voisinage desquels l'oscillation relative de* f *sur* u_n *est non bornée* [1].

---

[1] Et par suite l'ensemble des points de P au voisinage desquels la série des oscillations de f sur les u_n diverge est non dense sur P, puisque ce dernier ensemble est évidemment inclus dans K (voir *Comptes rendus*, 22 avril 1912).

41. Nous avons vu que, eu égard au mode de groupement des dérivés extrêmes finis ou infinis, distincts ou confondus, en un point x et pour un même côté, 7 cas sont possibles. En associant les diverses circonstances susceptibles de se produire simultanément pour l'un et l'autre côté, on trouve 49 cas, dont chacun est réalisable en des points isolés, comme un instant de réflexion suffit à le faire comprendre. Il est également probable que ces 49 cas peuvent se présenter chacun sur tout un ensemble clairsemé (non dense sur tout ensemble parfait). Les résultats antérieurement acquis dans l'étude des dérivés, nous inclinent à considérer uniquement parmi les ensembles denses sur un ensemble parfait, ceux qui contiennent eux-mêmes un ensemble parfait. Il est donc intéressant de rechercher si chacun des 49 cas est réalisable simultanément en tous les points d'un ensemble parfait P. Certains s'éliminent immédiatement; si, par exemple, nous avons en tout point de P une dérivée droite $+\infty$, nous aurons également en tout point de P, sauf éventuellement en une exception dénombrable, le dérivé supérieur gauche $+\infty$ (**27** et **36** *bis*). Le premier cas droit ne peut donc s'associer à aucun des cas gauches 4° à 7°, du moins simultanément en tout point de P. Il y aurait lieu, quand l'un des 49 cas comprend des deux côtés au moins un dérivé extrême fini, de subdiviser ce cas selon les relations d'égalité ou d'inégalité présentées entre eux par ces deux dérivés [1]. Je laisse au lecteur le soin d'effectuer par le détail cette étude. Donnons seulement deux exemples, l'un d'*une dérivée infinie en tout point d'un ensemble parfait discontinu sans épaisseur* (cas 1° gauche et droit), l'autre d'un dérivé supérieur droit infini positif associé aux trois autres dérivés extrêmes simultanément nuls (cas 2° droit et 5° gauche).

42. *Exemple I.* — Soit un ensemble *parfait mince* E: $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, ses intervalles contigus énumérés par ordre de longueurs non croissantes, la même lettre désignant l'intervalle et sa longueur. Construisons une fonction croissante $y = f(x)$ définie sur le segment $0 - 1$, égale à x en ses deux extrémités, avec une dérivée

---

[1] On trouverait 103 modes distincts pour grouper les quatre dérivés extrêmes en un même point et non pas 85 seulement, comme je l'ai énoncé aux *Comptes rendus* (31 mai 1915). Le théorème du n° 27 élimine à lui seul trente-une de ces associations sur les ensembles non dénombrables.

infinie en ces points, pour le côté intérieur au segment, par exemple

$$y = \frac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{x}, \qquad (0 \leqq y \leqq 1, \quad 0 \leqq x \leqq 1).$$

Donnons-nous un nombre h_n jamais décroissant, infiniment grand avec n et tel que la série $u_n h_n$ soit convergente [1].

Soient a_n et b_n les extrémités de u_n. Posons

$$y_n = h_n u_n y\left(\frac{x - a_n}{u_n}\right) = \frac{2}{\pi} h_n u_n \arcsin\sqrt{\frac{x - a_n}{u_n}},$$

pour $a_n \leqq x \leqq b_n$. y_n s'annule à l'origine a_n de u_n et prend la valeur $h_n u_n$ à son extrémité b_n. Cela posé, utilisant une notation déjà expliquée (**10**), définissons ainsi une fonction continue $f(x)$ sur le segment ab limité par les points extrêmes de E :

$$f = (a \Sigma x) h_n u_n + \omega y_m(x).$$

ω étant nul si x est sur E et égal à un si x étranger à E est intérieur à u_m, donc si $a_m < x < b_m$.

Je dis que f a une dérivée finie en tout point extérieur à E et infinie sur E (infinie positive, puisque f est croissant).

Si x est intérieur à un intervalle u_m, pour examiner la limite de $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$ quand x' tend vers x, il suffit de considérer les valeurs de x' intérieures à u_m. La fonction f ne diffère dans u_m de y_m que par une quantité constante. y_m a, en chaque point intérieur à u_m, une dérivée finie et continue. Il en est donc de même de f. De plus, y_m a une dérivée infinie à droite en a_m et à gauche en b_m. Il en est encore ainsi de f.

Il nous suffit de montrer qu'en tout point de E limite de E du côté droit, f admet $+\infty$ pour dérivée droite et pareillement qu'en tout point de E limite à gauche, f possède $+\infty$ pour dérivée gauche.

---

[1] On peut prendre $h_n = \frac{1}{r_n^{1+\alpha}}$, α étant positif et r_n désignant le reste de la série u_n arrêtée à ce dernier terme : $r_n = u_{n+1} + u_{n+2}, \ldots$. *Voir* de la Vallée-Poussin, *Cours d'Analyse infinitésimale*, 3e éd., p. 407, et aussi dans le *Bulletin de la Société mathématique*, t. XL, p. 223, une Note que je n'aurais pas rédigée si j'avais pris connaissance des exercices proposés par M. de la Vallée-Poussin.

Établissons la première assertion. Soient ξ un point de E distinct des a_m et x un nombre supérieur à ξ. Il y a des points de E entre ξ et x. Donnons-nous un nombre A positif si grand que nous voudrons, mais fixe. h_n croissant indéfiniment avec n, soit N le rang à partir duquel h_n surpasse A. Aucun intervalle u_n n'ayant son extrémité gauche en ξ, parmi les points $a_1, a_2, \ldots, a_N$ situés à droite de ξ, soit δ la distance à ξ de celui d'entre eux qui en est le plus voisin. δ est positif. Le segment ξ à $\xi + \delta$ ayant ses extrémités agrégées à E, tous les intervalles u_n qui ont au moins un point appartenant à ce segment sont entièrement intérieurs à lui et, se trouvant placés à droite de ξ et distants de ξ de moins de δ, ils ont tous un indice au moins égal à N. Soit x un point quelconque de ce segment $\xi, \xi + \delta$. Si x est sur E, on a $f(x) - f(\xi) = (\xi \Sigma x) h_n u_n$. Mais n surpassant N, h_n surpasse A. Donc, $f(x) - f(\xi) > \mathrm{A}(\xi \Sigma x) u_n = \mathrm{A}(x - \xi)$, l'égalité des derniers nombres provenant de ce que, E étant mince, la distance de deux quelconques de ses points est égale à la somme de ses contigus compris entre ces deux points. Supposons maintenant x hors de E, toujours entre ξ et $\xi + \delta$ et intérieur à un certain contigu u_m. On a toujours $m > \mathrm{N}$. Écrivons

$$f(x) - f(\xi) = (\xi \Sigma a_m) h_n u_n + y_m(x) > \mathrm{A}(a_m - \xi) + y_m(x).$$

Le quotient par x de la fonction $y = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend positivement vers zéro. Il est d'ailleurs positif et continu sur le segment $0 - 1$ diminué du point 0. Donc il possède un certain minimum positif l. D'après $\frac{y}{x} > l$ on a $\frac{y_n : h_n u_n}{\left(\frac{x - a_n}{u_n}\right)} > l$. Donc,

$$y_m(x) > l h_m (x - a_m),$$

et, d'après $m > \mathrm{N}$,

$$f(x) - f(\xi) > \mathrm{A}(a_m - \xi) + l\mathrm{A}(x - a_m).$$

Soit μ le plus petit des deux nombres 1 et l. On a

$$f(x) - f(\xi) > \mu \mathrm{A}(x - \xi),$$

quel que soit x entre ξ et $\xi + \delta$, aussi bien sur E que hors de E. δ étant positif, indépendant de x, et calculable pour chaque valeur de A, μ enfin étant une constante numérique, f possède en ξ la

dérivée droite $+\infty$. On montre tout pareillement qu'en tout point de E, f a une dérivée gauche infinie positive. Donc, en tout point de E, f a la dérivée bilatérale $+\infty$.

43. Cet exemple donne lieu à l'importante remarque suivante. Ajoutons à f une fonction $l(x)$ constante dans chacun des u_n et cependant croissante entre deux points quelconques de E non simultanément extrémités d'un même intervalle contigu. Si

$$f_1(x) = f(x) + l(x),$$

la dérivée de $f_1(x)$ est la même que celle de f à l'intérieur de tout intervalle contigu à E. Dans tout autre cas, $l(x)$ n'étant pas décroissant et la dérivée de f étant $+\infty$, f_1 possède aussi la dérivée $+\infty$. Observons donc dès maintenant qu'une fonction continue n'est pas déterminée par la condition de posséder en tout point une dérivée donnée φ si cette dérivée n'est point partout finie et plus précisément si elle est infinie d'un signe unique sur un ensemble parfait, ce qui aura toujours lieu dès que l'ensemble $|\varphi| = \infty$ sera non dénombrable, auquel cas l'un des ensembles $\varphi = +\infty$ et $\varphi = -\infty$ est lui-même non dénombrable. (*Voir* LI, p. 75, où la réponse à la question précédente est considérée comme dubitative.)

44. Rien ne serait plus simple que de modifier l'ensemble précédent de façon à obtenir avec une dérivée droite infinie positive des dérivés inférieurs gauches finis, ou infinis négatifs. Remarquons d'abord que l'existence de la dérivée droite $+\infty$ en tout point d'un ensemble parfait P détermine nécessairement sur P, en dehors d'une exception dénombrable possible, le dérivé supérieur gauche $+\infty$. Mais les raisonnements faits pour établir l'existence de la dérivée droite valent encore si l'on remplace y_n par toute autre fonction $h_n u_n Y\left(\frac{x - a_n}{u_n}\right)$, pourvu que $Y(x)$ défini de 0 à 1 et supposé égal à x aux extrémités de l'intervalle : 1° ait la dérivée droite $+\infty$ à l'origine; 2° surpasse une fonction $y = lx$ dans le même intervalle, l étant une constante positive. Prenons pour Y une fonction telle que $\sqrt{2x - x^2}$, ordonnée d'un quadrant circulaire, ayant sa tangente

horizontale pour $x = 1$, ou bien telle que $x + \sqrt{x(1-x)}$, ordonnée d'une ellipse ayant ses tangentes verticales pour $x = 0$ et $x = 1$. En posant toujours $f(x) = (a\Sigma x) h_n u_n + \omega Y_m(x)$, ω étant nul si x est sur P et égal à 1, pour $a_m < x < b_m$, on a, avec la dérivée droite $+\infty$ en tous les points de P, dans le premier cas, une fonction croissante, donc à dérivés jamais négatifs admettant la dérivée gauche zéro en toute extrémité droite d'intervalle contigu à P; dans le second cas, une fonction admettant la dérivée gauche $-\infty$ aux mêmes points. Dans le premier cas, sur un résiduel de E et par suite sur tous les ensembles parfaits inclus dans ce résiduel, nous aurons en tout point la dérivée droite $+\infty$, le dérivé supérieur gauche $+\infty$, le dérivé inférieur gauche 0. Dans le second cas, il sera pareillement possible d'extraire de E un ensemble parfait en tout point duquel f possédera la dérivée droite $+\infty$ et à gauche les dérivés extrêmes $+\infty$ et $-\infty$. Nous verrons un peu plus loin que l'existence d'une dérivée droite $+\infty$ ne peut se produire en tout point que sur un ensemble mince. Il est à peine utile d'ajouter qu'en changeant $f(x)$ en $-f(x)$, x en $-x$, on obtiendrait, selon les cas, des exemples de dérivées $-\infty$, de dérivées seulement droites $-\infty$, de dérivées seulement gauches $+\infty$, ou $-\infty$, en tous les points d'un même ensemble parfait.

45. *Exemple II.* — Nous allons donner un exemple de fonction possédant *sur un ensemble parfait le dérivé supérieur droit* $+\infty$, *les trois autres dérivés extrêmes étant nuls.* Nous montrerons un peu plus loin que l'ensemble parfait où ces circonstances se réalisent doit nécessairement être dépourvu d'épaisseur.

Soient P un premier ensemble parfait quelconque, $u_1, \ldots, u_n, \ldots$, ses intervalles contigus, a et b ses points extrêmes. Construisons une fonction continue f possédant : 1° une dérivée finie et continue en tout point extérieur à P; 2° une dérivée gauche nulle en tout point de P; 3° un dérivé inférieur droit nul en tout point de P; 4° un dérivé supérieur droit infini (positif) en tout point de première espèce gauche de P.

Nous prendrons $f = 0$ sur P. Pour définir f sur u_n, considérons en premier lieu une fonction $Y(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes : 1° $Y(x)$ est définie sur le segment $0 - 1$, positive à l'inté-

rieur, nulle aux extrémités, continue partout; 2° $Y(x)$ admet une dérivée continue en tout point intérieur au même segment, nulle et continue en 1, infinie à l'origine, la dérivée en ces deux derniers points étant nécessairement relative au seul côté intérieur au segment $0-1$. Par exemple, on peut choisir $Y=(1-x)^2\sqrt{x}$. Considérons la fonction suivante définie entre 0 et 1, $y(x)=\sin^2\frac{1}{x}Y(x)$. Elle n'est jamais négative. Elle est nulle une infinité de fois en des points $x=\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \ldots$, tendant vers l'origine par valeurs décroissantes. Elle touche Y en une infinité de points $x=\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}$ (k entier $\geqq 0$) et ne l'excède jamais. Donc, en tout point intérieur à l'intervalle $0-1$, y a une dérivée finie; au point 1, ou Y et Y′ s'annulent et sont continues, y et y' s'annulent et sont continues. A l'origine, y a son dérivé inférieur droit nul à cause de $y \geqq 0$ pour toute valeur de x et $y=0$ pour $x=\frac{1}{k\pi}$. A l'origine, le dérivé droit supérieur de y est $+\infty$, à cause de $y=Y$ pour $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ et de l'existence d'une dérivée infinie positive pour Y à l'origine. Enfin, le maximum de y dans l'intervalle $0-1$ est un nombre positif l au plus égal au maximum de Y. Prenons $y_n(x)=u_n^2 y\left(\frac{x-a_n}{u_n}\right)$. x variant de a_n à b_n, $\frac{x-a_n}{u_n}$ varie de 0 à 1. u_n est donc le champ de définition de y_n. y_n s'annule en a_n et b_n, est continue intérieurement à u_n et bornée par les nombres 0 et lu_n^2 dont le second est infiniment petit avec u_n. Donc, si nous prenons f égal à y_n sur chaque u_n et à 0 sur P, f est continu.

y_n a une dérivée finie en tout point intérieur à u_n. Donc, f en dehors de P a une dérivée finie (et même continue) en tout point. En b_n, y_n a une dérivée gauche nulle. Il en est donc de même de f. Pareillement f en tout point a_n a mêmes nombres dérivés droits que y_n, donc $+\infty$ et 0. Je dis que f possède en tout point de P le dérivé inférieur droit zéro. Ceci a été prouvé pour les points a_n. Soit ξ un point de P distinct des a_n, donc limite de points de P situés à sa droite. On a $f(\xi)=0$. x tendant vers ξ, quand x est sur P, $f(x)$ est nul; quand x est étranger à P, $f(x)$ n'est en tout cas jamais négatif.

Donc $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ admet la limite zéro, mais ne possède aucune limite négative. Donc, en ξ, le dérivé inférieur droit est nul. Cette propriété appartient donc à tous les points de P distincts des a_n ou confondus avec eux. On montre par le même raisonnement que, dans le cas où ξ est sur P et distinct des b_n, donc limite de points de P situés à sa gauche, la plus grande limite du quotient $\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}$, x tendant vers ξ en croissant, est zéro. Pour montrer qu'en ξ comme en b_n, il y a une dérivée gauche égale à zéro, il reste donc seulement à montrer que le dérivé inférieur gauche est nul en tout point de P.

Donnons-nous ε, nombre positif quelconque, et montrons la possibilité de calculer un nombre positif h pour la valeur de ξ considérée de façon que, si $\xi-h<x<\varepsilon$, on ait $f(\xi)-f(x)>-(\xi-x)\varepsilon$, ou $f(x)<(\xi-x)\varepsilon$. Puisque $\frac{y(x)}{1-x}$ tend vers zéro pour $x=1$ et est continu quand x varie entre 0 et 1, cette fonction a un certain maximum μ. Donc $\frac{y_n(x)}{b_n-x}=u_n\frac{y\left(\frac{x-a_n}{u_n}\right)}{1-\frac{x-a_n}{u_n}}$ a dans l'intervalle a_nb_n pour maximum μu_n. Soit donc N un entier à partir duquel, pour toutes les valeurs de n, $\mu u_n<\varepsilon$, ce qui est possible, u_n tendant vers zéro. Alors, quel que soit x appartenant à un intervalle u_m d'indice supérieur à N, on a $f(x)<(b_m-x)\varepsilon$. D'autre part, pour les intervalles en nombre fini $u_1, u_2, \ldots, u_N$ sur chacun desquels f ou la fonction y_n de même rang a une dérivée gauche nulle en b_n, il existe un nombre h tel que, pour tout point x intérieur à l'un de ces intervalles, soit u_m, et distant de son extrémité droite de moins de h, on ait $f(x)<(b_m-x)\varepsilon$. Alors, quel que soit x appartenant à un intervalle quelconque u_m d'indice supérieur, inférieur ou égal à N, mais en tous cas distant de b_m de moins de h, on aura $f(x)<(b_m-x)\varepsilon$. Soient maintenant ξ un point de P et x un nombre quelconque compris entre $\xi-h$ et ξ. Si x est sur P, on a $f(x)-f(\xi)=0$. Si x n'est pas sur P, mais est intérieur à un intervalle u_m, on a $b_m-x<\xi-x<h$, donc $f(x)<(b_m-x)\varepsilon$, donc $<(\xi-x)\varepsilon$, et enfin $0\geq\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}>-\varepsilon$. En tout point ξ de P, il y a donc une dérivée gauche nulle. Et

d'autre part nous montrons même, fait sans intérêt général d'ailleurs, que sur l'ensemble P des points ξ, la convergence vers zéro de $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ est uniforme, le paramètre de la convergence étant $x-\xi$, infiniment petit négatif.

En résumé, nous avons construit une fonction f possédant, en tout point une dérivée gauche nulle, en tout point un dérivé droit inférieur nul, et cependant, en un ensemble de points a_n dense sur un ensemble parfait P, un dérivé supérieur droit infini. Mais, l'ensemble des a_n étant dense sur P, les points où le dérivé supérieur droit est $+\infty$ forment un résiduel de P. Ce dernier contient donc lui-même un ensemble parfait en chaque point duquel, comme il a été annoncé, le dérivé supérieur droit est $+\infty$, les trois autres étant nuls.

45 *bis*. On transformerait sans aucune difficulté cet exemple de façon à joindre en tout point à un dérivé supérieur droit $+\infty$ trois autres dérivés extrêmes finis distincts ou confondus, leurs inégalités devant toujours être compatibles avec les conclusions des n^{os} **27** et **36** *bis*.

Second Théorème des nombres dérivés (Théorème métrique).

46. Nous arrêterons là ce début de réalisation ou d'élimination des 49 cas définis plus haut. Nous allons porter notre attention sur le point de savoir si ces divers cas peuvent se présenter sur la totalité d'un ensemble épais, afin de retenir uniquement ceux qui répondent à cette condition. Non pas que les ensembles minces soient négligeables dans la détermination des fonctions par leurs nombres dérivés. Tout au contraire, nous verrons et il est connu qu'une fonction peut avoir sur une épaisseur pleine une dérivée nulle et n'être constante dans aucun intervalle. Mais il se trouvera que les opérations inverses de la dérivation examinées ultérieurement et appliquées à des données φ conduisent toujours à des fonctions indépendantes d'une modification arbitraire de φ sur un ensemble sans épaisseur. Nous découvrirons ultérieurement des rapports caractéristiques de ces fonctions avec les ensembles parfaits minces et cela nous justifiera

d'attacher une grande importance aux propriétés métriques des ensembles sur lesquels les divers 49 cas distingués plus haut se réalisent.

47. Nous éliminerons préalablement deux circonstances impossibles à obtenir en tout point du continu. Elles nous seront l'occasion d'appuyer cette opinion justifiée par d'autres exemples, que la démonstration de certaines propriétés des fonctions dérivées se simplifie souvent quand on les envisage seulement comme des nombres dérivés (extrêmes ou médians) pour un côté ou pour l'autre, c'est-à-dire comme des valeurs limites particulières des quotients $\mathrm{VR}(f,x,x')$ ou $\mathrm{VR}(f,x',x)$, quand, x étant invariable, x' tend vers x par valeurs supérieures ou inférieures. Ainsi la proposition qu'une fonction dont la dérivée est partout nulle est une constante se démontre très simplement sans faire appel à aucune formule d'accroissements finis quand on remplace la dérivée par un dérivé quelconque pour un côté invariable.

48. *Une fonction continue possédant en chaque point et d'un certain côté invariable un dérivé nul, médian ou extrême, est une constante.*

Supposons par exemple que le dérivé considéré soit droit. Soit ab un segment en tout point duquel l'hypothèse du théorème est vérifiée. Donnons-nous un nombre positif quelconque ε. Il existe certainement un point x à droite de a et dans l'intervalle ab, où l'on a

$$(1) \qquad |f(x)-f(a)|<\varepsilon(x-a).$$

Soit ξ la borne à droite des points situés entre a et b où la relation précédente est vérifiée. Je dis que ξ est en b. En effet, en cette borne droite ξ, on a, par raison de continuité, la relation

$$|f(\xi)-f(a)|\leq\varepsilon|\xi-a|.$$

Mais en ξ il y a un dérivé médian nul à droite; donc, si ξ n'est pas en b, il y a un point ξ_1, compris entre ξ et b, où l'on a

$$|f(\xi_1)-f(\xi)|<\varepsilon(\xi_1-\xi).$$

En ajoutant les deux dernières inégalités, on trouve

$$|f(\xi_1) - f(a)| < \varepsilon(\xi_1 - a),$$

et ξ n'est pas la borne droite des points vérifiant l'inégalité (1). Donc ξ est en b. On a donc $|f(b) - f(a)| \leqq \varepsilon(b - a)$, quel que soit ε. Donc $f(b) = f(a)$. Immobilisons a. La valeur de f en un point arbitraire b est $f(a)$, une constante.

Si nous remplaçons les mots *dérivé médian droit* par le simple mot *dérivée*, nous avons sans autre modification une démonstration du théorème sur les fonctions à dérivée partout nulle, qui, partant immédiatement de la définition de la dérivée, me paraît atteindre beaucoup plus rapidement son but que la démonstration habituelle, celle-ci supposant l'établissement préalable de la formule des accroissements finis. Un corollaire intéressant du théorème démontré à l'instant est celui-ci :

Une fonction continue ne peut pas avoir en tout point d'un intervalle ses dérivés extrêmes d'un même côté doués de signes opposés, ni en particulier égaux l'un à $+\infty$, l'autre à $-\infty$.

Car alors, en tout point de cet intervalle elle admettrait de ce même côté le dérivé médian zéro et serait constante dans l'intervalle. Tous ses dérivés seraient nuls contrairement à l'hypothèse énoncée.

Ces résultats sont établis dans l'ouvrage de M. Lebesgue (p. 72), mais à l'aide d'inégalités généralisant pour les nombres dérivés la formule des accroissements finis.

48 *bis*. On montre par un raisonnement de même forme qu'un nombre dérivé d'un certain côté ne peut pas être infiniment grand d'un signe donné en tout point d'un intervalle. Car, si par exemple le dérivé inférieur gauche était partout $-\infty$ sur le *segment ab*, il y aurait, si grand que fût le nombre positif fixe A, des points x' compris entre a et b, et où l'on aurait $f(b) - f(x') < -A(b - x')$. La borne à gauche des points x' (tous situés par hypothèse entre a et b) ne saurait être (on le voit comme dans le cas du dérivé nul) un point ξ supérieur à a. Donc la borne à gauche des points x est en a et l'on

a $f(b) - f(a) \leqq - A(b - a)$, ce qui est absurde, A étant un nombre positif quelconque et f étant continue, donc finie en a et b.

Les deux théorèmes précédents n'empêchent pas, nous le montrerons plus loin (**65**), qu'une même fonction continue ne puisse posséder les trois dérivés zéro, $+\infty$ et $-\infty$ à la fois, au moins unilatéralement en tout point, et des deux côtés sur une épaisseur pleine.

49. Pour démontrer l'impossibilité de certaines associations de dérivés finis ou infinis sur des ensembles épais, nous tirerons grand parti du théorème suivant, susceptible, selon les applications, de diverses formes particulières qui n'en modifient ni l'esprit, ni le mode de démonstration. Cette nouvelle proposition concerne les rapports des nombres dérivés et des ensembles parfaits, discontinus exclusivement. Le Premier Théorème ne distinguait pas le continu des autres ensembles parfaits.

Second Théorème. — *Si en tout point d'un ensemble parfait d'épaisseur e entre ses points extrêmes a et b, le dérivé supérieur droit de la fonction continue f surpasse λ, si dans tout intervalle u_n ou $a_n b_n$, la variation relative inférieure de f en deçà de b_n surpasse $-\mu$, la variation relative de f entre a et b est au moins*

$$\lambda e - \mu(1 - e).$$

Nous supposerons d'abord λ et μ non négatifs, ce qui constitue le cas le plus important. Soit ξ un point quelconque de P. Le dérivé supérieur droit de f en ξ surpassant λ, il existe, dans tout intervalle ayant ξ pour extrémité gauche, des points ξ_1 où

$$(1) \qquad f(\xi_1) - f(\xi) > \lambda(\xi_1 - \xi).$$

Nous dirons que deux points sont *associés selon l'inégalité* (1) s'ils peuvent être dans la relation précédente substitués respectivement, le plus grand à ξ_1, le plus petit à ξ. Nous ferons une double remarque. La première, c'est que, si la relation (1) est vérifiée pour deux couples adjacents $\xi\xi_1$, $\xi_1\xi_2$, toujours énoncés par valeurs croissantes, elle est vérifiée pour le couple des points extrêmes $\xi\xi_2$. Il en serait encore ainsi, au cas où une et une seule des inégalités (1) relatives à l'un et l'autre couple serait transformée en égalité. Notre

seconde remarque, c'est que, à cause de la continuité de f en x, l'inégalité

$$(2) \qquad f(\xi_1) - f(x) > \lambda(\xi_1 - x),$$

où on laisse maintenant ξ_1 immobile, sera vérifiée pour toutes les valeurs de x intérieures à un intervalle $\xi'\xi$, d'extrémité droite ξ.

Cela posé, le dérivé supérieur droit en a dépassant λ, il existe des points $\xi_1(a)$ à droite de a, intérieurs à ab et associés à a suivant l'inégalité (1). Si b est associé à a, la variation relative de f entre a et b surpasse λ et *a fortiori* λe. La formule est établie (λ et μ étant positifs). Supposons qu'il en soit autrement. Alors les $\xi_1(a)$ ont une borne à droite γ_1 où, à cause de la continuité de f, on n'a pas l'inégalité contraire à (1), ni davantage l'inégalité (1), sinon, dans ce dernier cas, γ_1 pourrait être repoussé vers la droite. On a donc en γ_1

$$f(\gamma_1) - f(a) = \lambda(\gamma_1 - a).$$

γ_1 n'est pas sur P, sinon, à cause de l'existence en γ_1 d'un dérivé droit supérieur à λ, il existerait un point γ' à droite de γ_1 et associé selon l'inégalité (1) à γ_1, donc à a, conclusion absurde, γ' surpassant γ_1, γ_1 est donc intérieur à un certain contigu à P, intervalle dont je désigne par β_1 l'extrémité droite. Remarquons que, d'après notre hypothèse sur la variation relative de f sur les u_n en deçà des b_n, nous avons $f(\beta_1) - f(\gamma_1) > -\mu(\beta_1 - \gamma_1)$. Avec β_1 j'opère comme avec a. Je détermine γ_2 par la condition d'être la borne à droite des points de ab, situés à droite de β_1 et associables à β_1 d'après l'inégalité (1). En général, γ_2 est intérieur à un intervalle contigu à P, soit $\alpha_2\beta_2$, etc. L'opération se poursuit tant que γ_n n'est pas en b. Deux cas sont *a priori* possibles. Ou bien, l'un des γ_n est en b. L'opération est arrêtée. b est associé à γ_{n-1} selon l'inégalité (1) ou selon l'égalité limite de cette inégalité. La totalité de l'ensemble P est sur les segments $a\gamma_1$, $\beta_1\gamma_2$, ..., $\beta_{n-1}\gamma_n$, ce dernier identique à $\beta_{n-1}b$, et chacun des intervalles $\gamma_1\beta_1$, $\gamma_2\beta_2$, ..., $\gamma_{n-1}\beta_{n-1}$ est agrégé à un intervalle contigu à P avec communauté de l'extrémité droite. Ou bien, aucun des γ_n n'est en b. Comme par hypothèse ils sont tous sur le segment ab, ils sont tous entre a et b. Comme ils progressent vers la droite quand n croît, ils ont donc un point limite M, éga-

lement limite des β_n et par suite agrégé à P. Je dis que M est en b. Sinon, il existera un intervalle M'M à tous les points x duquel un même point M_1 situé à droite de M et à gauche de b est associable selon (1). Mais γ_n tendant en croissant vers M, est, à partir d'une certaine valeur p de n, compris entre M' et M. Or, la relation (1) étant vraie pour le couple (γ_p, M_1) et aussi, sauf son changement en égalité, pour (β_{p-1}, γ_p) est vraie pour (β_{p-1}, M_1). γ_p ne satisfait donc pas à sa définition d'être le point de ab bornant à droite les points associables à β_{p-1}. γ_p ne peut donc pas être intérieur à M'M. Donc γ_n ne peut pas tendre vers M.

Donc, s'il y a une infinité de points γ_n, ils tendent vers b. On a, quel que soit m,

$$(2)\quad f(b)-f(a)=[f(\gamma_1)-f(a)]+[f(\gamma_2)-f(\beta_1)]+\ldots+[f(\gamma_m)-f(\beta_{m-1})]$$
$$+[f(\beta_1)-f(\gamma_1)]+\ldots+f[(\beta_{m-1})-f(\gamma_{m-1})]+[f(b)-f(\gamma_m)],$$

les γ_m coïncidant tous avec b à partir d'un certain rang, ou étant en infinité. Dans ce second cas, chaque terme de la première ligne est égal au produit de λ par la longueur du segment où il exprime la variation de f. Donc, la somme de cette ligne est

$$\lambda(a\gamma_1+\beta_1\gamma_2+\ldots+\beta_{m-1}\gamma_m),$$

$a\gamma_1, \ldots$ étant les longueurs des segments limités par a et γ_1, etc. Elle tend vers la somme h de la série constituée par les longueurs des segments $\beta_{n-1}\gamma_n$ qui, remarquons-le, portent la totalité des points de P situés entre a et b. La somme des termes de la première ligne tend donc vers λh quand m croît indéfiniment. Le dernier terme de la seconde ligne tend vers zéro, f étant continue. D'ailleurs, la variation relative inférieure de f sur l'intervalle contigu d'extrémité droite β_n et en deçà de β_n, étant supérieure à $-\mu$, nous avons

$$[f(\beta_1)-f(\gamma_1)]+\ldots+[f(\beta_{m-1})-f(\gamma_{m-1})]>-\mu(\beta_1\gamma_1+\ldots+\beta_{m-1}\gamma_{m-1}).$$

En résumé, nous avons rassemblé P sur une suite infinie de segments tendant vers b, de longueur totale h. Nous trouvons

$$(3)\qquad f(b)-f(a)>\lambda h-\mu(b-a-h).$$

Cette relation ne fait intervenir les signes ni de λ ni de μ.

Si γ_n coïncide avec b, mais non pas γ_{n-1}, les variations relatives de f sur $a\gamma_1$, sur $\beta_1\gamma_2$, ..., sur $\beta_{n-2}\gamma_{n-1}$ sont toutes égales à λ, et au moins égales à λ sur $\beta_{n-1}\gamma_n$ ou $\beta_{n-1}b$. Donc, les termes de la première ligne dans l'égalité (2) ont une somme au moins égale à

$$\lambda(a\gamma_1+\beta_1\gamma_2+\ldots+\beta_{n-1}b)=\lambda h,$$

h désignant toujours la somme de la série finie ou infinie $\beta_i\gamma_{i+1}$. Dans tous les cas, que le nombre des intervalles contenant la totalité de P soit infini ou fini et même égal à 1 (quand γ_1 coïncide avec b), on a toujours la formule (3). Supposons maintenant λ et μ positifs. Alors, nous renforçons l'inégalité en remplaçant h par un nombre plus petit, savoir la mesure de P entre a et b. Cette mesure étant $e(b-a)$, nous trouvons bien $(a\mathrm{VR}b)f>\lambda e-\mu(1-e)$.

Si λ et μ ne sont pas positifs, nous allons montrer que, dans la formule (3), h peut être supposé aussi voisin qu'on le veut de la mesure de P, soit $\mathrm{M}=e(b-a)$. Remarquons d'abord qu'on a toujours $\mathrm{M}<h<b-a$. Du segment ab retranchons les N plus grands contigus de P, $u_1, u_2, \ldots, u_\mathrm{N}$ et soient, dans l'ordre où nous les rencontrons, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\mathrm{N}+1}$ les segments restants, deux à deux sans points communs. Soient $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_{\mathrm{N}+1}$ les mesures de P sur ces segments. On a $\sum \mathrm{M}_i=\mathrm{M}$. Appliquons au segment ρ_i la formule (3). Il existe un certain nombre h_i compris entre M_i et ρ_i (ou égalant ρ_i) tel qu'on ait

$$\mathrm{V}(f,\rho_i)>\lambda h_i-\mu(\rho_i-h_i)\qquad(i=1,2,\ldots,\mathrm{N}+1).$$

Or, d'après notre hypothèse sur le minimum des variations relatives de f sur les u_n en deçà de b_n, on a

$$\mathrm{V}(f,u_i)>-\mu u_i\qquad(i=1,2,\ldots,\mathrm{N}).$$

En faisant la somme de toutes les inégalités obtenues et en remarquant que

$$\mathrm{V}(f,a,b)=\sum\mathrm{V}(f,\rho_i)+\sum\mathrm{V}(f,u_i),\qquad b-a=\sum\rho_i+\sum u_i,$$

il vient, en posant $\sum h_i=\mathrm{H}_\mathrm{N}$,

$$\mathrm{V}(f,a,b)>\lambda\mathrm{H}_\mathrm{N}-\mu(b-a-\mathrm{H}_\mathrm{N}).$$

Or, nous avons

$$\sum M_i < \sum h_i < \sum \rho_i,$$

donc

$$M < H_N < b - a - \sum u_i.$$

Mais le dernier terme de ces relations, quand N croît indéfiniment, tend vers M. Donc, H_N tend vers M. Donc, quels que soient les signes de λ et μ, on a bien

$$V(f, a, b) \geqq \lambda M - \mu(b - a - M)$$

ou

$$(4) \qquad VR(f, a, b) \geqq \lambda e - \mu(1 - e).$$

C. Q. F. D.

Désignons respectivement par S et T la somme des termes de la première et de la seconde ligne dans l'égalité (2), que m puisse devenir infini ou doive rester fini, les β_i et γ_i étant obtenus comme il a été expliqué à la page 178. La seule condition de leur existence est que le dérivé supérieur droit de f surpasse λ en tout point de P, et alors, dans le second membre de l'inégalité (3), le terme λh bornant inférieurement S est exact. Le second terme de (3), soit $-\mu(b - a - h)$, borne inférieurement T, quand $VR(f, x, b_n) > -\mu$ pour tout point x de u_n. Remplaçons cette dernière hypothèse par celle-ci beaucoup moins restrictive : $V(f, x, b_n) \geqq -\mu u_n$, supposée vérifiée également quel que soit x dans u_n. En faisant tendre x vers b_n, on voit que μ ne peut pas être négatif. Alors T surpasse

$$-\mu(\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_m\beta_m + \ldots) = -\mu\tau,$$

si l'intervalle contigu renfermant γ_p est $\alpha_p\beta_p$. Désignons par h' la somme

$$a\alpha_1 + \beta_1\alpha_2 + \ldots + \beta_{p-1}\alpha_p + \ldots$$

des segments conservés dans ab quand on en retranche les contigus $\alpha_p\beta_p$. Ces segments conservés renferment la totalité de P. Donc, $h' > M$. D'ailleurs

$$\sum \alpha_p\beta_p + \sum \beta_p\alpha_{p+1} = \tau + h' = b - a.$$

Donc, T surpasse $-\mu(b-a-h')$ et l'on a dans notre nouvelle hypothèse la relation

$$(3\,bis)\qquad f(b)-f(a)>\lambda h-\mu(b-a-h'),$$

avec

$$M<h'<h<b-a.$$

μ étant nécessairement positif ou nul, le second membre de (3 *bis*) surpasse $\lambda h-\mu(b-a-M)$; mais, pour embrasser le cas où λ serait négatif, on achève la démonstration comme plus haut et l'on trouve encore

$$f(b)-f(a)\geqq\lambda M-\mu(b-a-M),$$

d'où la relation (4).

L'inégalité $V(f, x, b_n)\geqq-\mu u_n$ sera vérifiée quel que soit x dans un cas particulier important, celui où *l'oscillation relative de f sur u_n ou* $OR(f, u_n)$ *est inférieure à* μ. Car $V(f, x, b_n)$ est en valeur absolue inférieur à l'oscillation de f sur u_n [1].

49 *bis*. Le lecteur devra remarquer qu'un raisonnement analogue au suivant ne serait pas légitime : « Tout point ξ de P est intérieur à un intervalle $\xi'\xi_1$ entre les extrémités duquel l'inégalité (1) est vérifiée. Recouvrons P avec un nombre fini d'intervalles $\xi'\xi_1$. Le champ recouvert contient P et se compose d'un nombre limité d'intervalles i. Il est possible de cheminer en conservant l'inégalité (1) de l'extrémité gauche à l'extrémité droite de chacun de ces intervalles i. » C'est ici que serait la faute. En effet, il n'est pas exact que la vérité de l'inégalité (1) d'une part entre les extrémités gauche et droite d'un

---

[1] Appelons *altération relative supérieure* (ou *inférieure*) *de f sur un intervalle $\alpha\beta$ au delà de α* le maximum (ou le minimum) du quotient

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

pour $\alpha<x<\beta$. Désignons ces nombres par $AR_s(f, \alpha, \alpha\beta)$ et $AR_i(f, \alpha, \alpha\beta)$. De même, *l'altération relative supérieure* (ou *inférieure*) *de f sur $\alpha\beta$ en deçà de β* est le maximum (ou le minimum) de $\dfrac{f(\beta)-f(x)}{\beta-\alpha}$ pour $\alpha<x<\beta$. Nous

intervalle $\alpha\beta$, d'autre part entre celles d'un autre intervalle $\alpha'\beta'$, entraîne sa validité entre α et β' quand α' est intérieur à $\alpha\beta$, et β à $\alpha'\beta'$. Si par exemple dans le cas d'une dérivée droite (et non pas seulement du dérivé supérieur droit) surpassant λ en tout point de P, il est permis de supposer que, α et α' étant sur P, *tous* les points de $\alpha\beta$ d'une part sont associables à α, que *tous* ceux de $\alpha'\beta'$ sont associables à α', d'où la conclusion légitime que α et β' sont associables, il n'en est plus de même si tous les dérivés droits ne surpassent pas λ. Car alors, à l'intérieur de $\alpha\beta$, les points x associés à α forment un ensemble présentant des lacunes où peut précisément se trouver α'. Si nous ne supposons pas qu'aux points de P tous les dérivés droits de f surpassent λ, rien ne prouve qu'au delà d'un point ξ choisi au hasard sur P, on puisse trouver un seul point ξ_1 agrégé à P et associable à ξ par la relation (1).

Mais substituons à la première hypothèse du théorème relative aux dérivés, celle-ci, plus restrictive que, *en chaque point de* P, *f a son dérivé inférieur droit surpassant* λ. Nous pouvons élargir notre seconde hypothèse concernant les variations relatives de f sur u_n en deçà de b_n. Il n'est plus nécessaire que toutes surpassent $-\mu$. *Il*

---

désignons ces valeurs par $AR_s(f, \alpha\beta, \beta)$ et $AR_i(f, \alpha\beta, \beta)$. Si α_1 et β_1 sont respectivement les points du segment $\alpha\beta$ où f est maximum et minimum, on a :

$$AR_s(f, \alpha, \alpha\beta) = \frac{f(\alpha_1) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}, \qquad AR_i(f, \alpha, \alpha\beta) = \frac{f(\beta_1) - f(\alpha)}{\beta - \alpha},$$

$$AR_s(f, \alpha\beta, \beta) = \frac{f(\beta) - f(\beta_1)}{\beta - \alpha}, \qquad AR_i(f, \alpha\beta, \beta) = \frac{f(\beta) - f(\alpha_1)}{\beta - \alpha}.$$

Rappelons d'ailleurs que $OR(f, \alpha\beta) = \dfrac{f(\alpha_1) - f(\beta_1)}{\beta - \alpha}$. On a les relations immédiates suivantes :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = AR_s(f, \alpha, \alpha\beta) \leqq OR(f, \alpha\beta), \\ -OR(f, \alpha\beta) \leqq AR_i(f, \alpha, \alpha\beta) = 0, \\ OR(f, \alpha\beta) = AR_s(f, \alpha, \alpha\beta) - AR_i(f, \alpha, \alpha\beta), \\ AR_i(f, \alpha, \alpha\beta) \leqq VR(f, \alpha\beta) \leqq AR_s(f, \alpha, \alpha\beta). \end{array} \right.$$

Ces relations subsistent en remplaçant avec les mêmes indices i et s

$$AR(f, \alpha, \alpha\beta)$$

par $AR(f, \alpha\beta, \beta)$. On a alors des relations (5 *bis*). Enfin, si AR_s est positif, il en est de même de VR_s sur le même intervalle et pour la même extrémité et l'on

suffit que l'une d'entre elles, la variation relative de f sur u_n, surpasse ce même nombre $-\mu$.

En effet, $M(x)$ étant la mesure de P entre a et x, soit E l'ensemble des points β de P où existe un nombre $h(x)$ vérifiant le système d'inégalités

$$(6) \quad f(x)-f(a) \geqq \lambda h(x) - \mu[x-a-h(x)], \quad M(x) \leqq h(x) \leqq x-a.$$

E est fermé, à cause de la continuité de $M(x)$ et de f. Tous les points x associés à a par la relation (1) vérifient les inégalités (6) en y faisant $h(x) = x - a$. Or, $\delta_d(a)$ surpassant λ, tous les points d'un intervalle aa_1 sont associés à a selon (1). D'ailleurs, a étant limite de P du côté droit, P admet des points sur aa_1. Tous ceux-ci appartiennent à E qui existe donc. Soit ξ l'extrémité droite de E. Je dis que $\xi = b$. Sinon, on aurait $\xi < b$. Or : 1° si ξ est limite de points de P situés à sa droite, ceux-ci, au-dessous d'une certaine distance à ξ, sont tous associés à ξ selon (1). Soit ξ_1 l'un d'eux. On a

$$f(\xi_1) - f(\xi) > \lambda(\xi_1 - \xi), \quad M(\xi_1) - M(\xi) < \xi_1 - \xi.$$

---

a $AR_s < VR_s$. Mais VR_s peut être négatif, dans le cas où f est sur $\alpha\beta$ maximum en α ou minimum en β. Or simultanément AR_s est nul. De même, si $AR_i < 0$, on a $VR_i \leqq AR_i$. En tout cas, μ étant positif, les inégalités $VR_s < \mu$ ou $VR_i > -\mu$ entraînent respectivement $AR_s < \mu$ et $AR_i > -\mu$ sans réciprocité.

Les relations (5) et (5 *bis*) d'une part, les relations entre les AR et les VR d'autre part, permettraient d'énoncer respectivement les applications VI et VII du Premier Théorème en y remplaçant pour la première les lettres VR par AR, et pour la seconde les mots « oscillation relative de f sur u_n » par « altération relative extrême de f sur u_n au delà de a_n ou en deçà de b_n ». Le lecteur, en se reportant aux endroits indiqués, vérifiera l'exactitude des nouveaux énoncés.

Le Second Théorème subsiste en y remplaçant les variations relatives sur les contigus à P par les altérations relatives de mêmes noms. Seulement μ est alors nécessairement positif ou nul. D'ailleurs l'hypothèse ainsi transformée est impliquée dans la première. Elle est beaucoup moins restreinte. Elle l'est également moins que l'hypothèse $OR(u_n) < \mu$. On pourrait donc, puisque toutes deux donnent les mêmes conclusions (pour $\mu > 0$), ne considérer que celle des altérations. Seulement, dans les applications ultérieures du Second Théorème, toutes les fois qu'une inégalité du genre $AR_i > -\mu$ sera vérifiée sur chacun des u_n, il en sera également ainsi toujours de l'une ou de l'autre des inégalités $VR_i > -\mu$ ou $OR < \mu$ et ces dernières seront les plus directes à établir.

De là, en tenant compte des inégalités (6) où x est remplacé par ξ,

$$f(\xi_1)-f(a)>\lambda[h(\xi)+\xi_1-\xi]-[\xi_1-a-(\xi_1-\xi)-h(\xi)],\quad \mathrm{M}(\xi_1)<h(\xi)+\xi_1-\xi\leqq\xi_1-a.$$

Posons $h(\xi_1)=h(\xi)+\xi_1-\xi$. Il est visible que ξ_1 est dans E.

2° Si au contraire ξ est l'extrémité gauche d'un contigu u de P, soit ξ_1 l'extrémité droite de u. On a

$$f(\xi_1)-f(\xi)>-\mu(\xi_1-\xi),\quad \mathrm{M}(\xi_1)=\mathrm{M}(\xi).$$

Donc,

$$f(\xi_1)-f(a)>\lambda h(\xi)-\mu[\xi_1-a-h(\xi)],\quad \mathrm{M}(\xi_1)\leqq h(\xi)<\xi_1-a.$$

Posant $h(\xi_1)=h(\xi)$, on voit encore que ξ_1 est dans E. Donc, l'extrémité droite de E est nécessairement b. Donc, l'inégalité (3) est établie, h étant un nombre compris entre M, mesure de P sur ab, et $b-a$. On en déduit comme plus haut la formule (4).

49 *ter*. Pour rassembler dans un même Tableau toutes les formes susceptibles d'être données au Second Théorème, indiquons dans une première colonne la classe (droite ou gauche) de dérivés D auxquels s'applique le théorème, — dans la seconde, leur relation d'inégalité avec λ, — dans la troisième, si cette relation, vraie en tous les points de P, est satisfaite par certain dérivé, au moins un, le dérivé supérieur, ou par tous quand elle l'est par le dérivé inférieur, pour le côté désigné en tête de la ligne bien entendu, — dans la quatrième, l'inégalité supposée vraie sur tous les u_n, et concernant : les variations relatives de f prises soit en deçà des b_n quand les D sont droits, soit au delà des a_n quand les D sont gauches, et qui toutes, et en particulier la supérieure ou l'inférieure suivant les cas, doivent vérifier l'inégalité écrite avec μ ou avec $-\mu$ (de signe quelconque); ou encore l'oscillation relative $\mathrm{O}\mathfrak{R}u_n$ de f; ou enfin la variation relative de f sur u_n; — dans la cinquième, l'inégalité finale concernant la variation relative de f entre a et b, e désignant l'épaisseur de P entre a et b. Dans la quatrième colonne, les trois hypothèses intéressant μ et correspondant à une même ligne dans les deux premières colonnes sont de moins en moins restrictives, quand on les énumère de bas en haut. Pour la première et la troisième hypothèse, μ est de signe

quelconque; pour la seconde, μ est positif. La première implique la troisième. De même la seconde, toujours du type $\mathrm{OR}\, u_n < \mu$ (positif), entraîne $-\mu < \mathrm{VR}\, u_n < \mu$, donc l'existence d'une borne supérieure et d'une borne inférieure pour $\mathrm{VR}\, u_n$. Mais la première condition, liant à μ, nombre de signe quelconque, la variation relative de f sur u_n en deçà de b_n ou au delà de a_n, n'entraîne pas nécessairement $\mathrm{OR}\, u_n < |\mu|$, ni une autre relation invariable. Par exemple, f peut être croissant entre a_n et x agrégé à u_n, d'où $\mathrm{VR}_i(f, a_n, u_n) \geqq 0$, avec un dérivé droit nul en a_n, donc $-\mu = 0$, sans qu'on en conclue $\mathrm{OR}\, u_n \leqq 0$, donc $= 0$. De même, la condition vérifiée par OR n'entraîne rien concernant les VR_s et VR_i. Car, les nombres $\mathrm{VR}\,(f, a_n, x)$ ou $\mathrm{VR}(f, x, b_n)$, contenant en dénominateur un nombre infiniment petit aux points a_n et b_n, peuvent avoir leurs bornes extrêmes VR_s et VR_i infinies, tandis que $\mathrm{OR}\, u_n$ est toujours fini. Mais cette dernière circonstance nous fait dire que la première hypothèse bornant d'un côté les VR_s ou les VR_i est plus restrictive que la seconde bornant $\mathrm{OR}\, u_n$. Faisons une dernière remarque. La valeur exacte de λ a, en général, une grande importance. Celle de μ n'en a aucune. Il suffit que μ soit fini. Car les résultats que nous voudrons faire apparaître se manifesteront entre des points séparés par une épaisseur de P aussi voisine de 1 que nous le voudrons.

Les dérivés sont	Hypothèse régissant les dérivés de f en tout point de P.	Hypothèse concomitante sur les variations de f dans tous les contigus à P.	Conclusion.
droits	$\lambda <$ Δ_d	$-\mu < u_n \mathrm{VR}\, b_n$	$\lambda e - \mu(1-e) \leqq (a \mathrm{VR}\, b) f$
		$\mu > \mathrm{OR}\, u_n$	
	δ_d	$-\mu < \mathrm{VR}\, u_n$	
droits	$\lambda >$ δ_d	$\mu > u_n \mathrm{VR}\, b_n$	$\lambda e + \mu(1-e) \geqq (a \mathrm{VR}\, b) f$
		$\mu > \mathrm{OR}\, u_n$	
	Δ_d	$\mu > \mathrm{VR}\, u_n$	
gauches	$\lambda <$ Δ_g	$-\mu < a_n \mathrm{VR}\, u_n$	$\lambda e - \mu(1-e) \leqq (a \mathrm{VR}\, b) f$
		$\mu > \mathrm{OR}\, u_n$	
	δ_g	$-\mu < \mathrm{VR}\, u_n$	
gauches	$\lambda >$ δ_g	$\mu > a_n \mathrm{VR}\, u_n$	$\lambda e + \mu(1-e) \geqq (a \mathrm{VR}\, b)\ f$
		$\mu > \mathrm{OR}\, u_n$	
	Δ_g	$\mu > \mathrm{VR}\, u_n$	

Voici les conséquences très importantes que nous tirons du Second Théorème.

Applications du Second Théorème.

30. Application I. — *L'ensemble des points où f a d'un côté déterminé une dérivée infinie est sans épaisseur.*

Montrons que l'ensemble E où $\Delta_d = \delta_d = +\infty$ est de mesure nulle. Dans l'hypothèse contraire, E contiendrait un ensemble parfait épais en lui-même P_0. Soit u_n ou $a_n b_n$ un intervalle contigu à P_0. Les contigus u_n sur lesquels la variation relative de f est inférieure ou égale à un nombre fixe, zéro par exemple, ont leurs extrémités non denses sur P_0. Sinon, si l'ensemble H de ces extrémités était dense sur P_0, donc partout dense sur une portion P'_0 de P_0, f admettrait en tout point d'un résiduel de P'_0 un dérivé inférieur droit négatif ou nul, et non pas une dérivée droite infinie positive. Il y a donc une portion P de P_0 où H n'a pas de point et où, par suite, la variation relative de f dans tout intervalle contigu à P est positive. Alors, $f(b_n) \geqq f(a_n)$ sur tout contigu à P, ou $\mathrm{VR}\, u_n > 0$. Soient a et b les points extrêmes de P. Consultons notre Tableau où se résume le Second Théorème. Prenons λ si grand que nous voudrons. Suivons la première ligne et ses subdivisions. Le dérivé droit δ_d (1re et 3e colonne) surpasse λ (2e colonne) en tous les points de P et, dans tous les intervalles contigus à P, la variation relative de f est positive (4e colonne). Donc $(a\,\mathrm{VR}\,b)f > \lambda e$ (5e colonne). Or, e n'est pas nul, P étant comme P_0 épais en lui-même. Il est donc impossible que cette relation soit vérifiée quel que soit λ. Le théorème est donc démontré pour l'ensemble E défini par

$$\Delta_d = \delta_d = +\infty.$$

On le montrerait de même pour les ensembles où f possède une dérivée droite infinie négative ou une dérivée gauche infinie d'un signe donné. *A fortiori*, est-il impossible d'avoir une dérivée bilatérale infinie sur un ensemble épais. Si donc nous voulons dans notre étude réserver un traitement spécial aux ensembles minces, nous n'avons pas à nous occuper du premier ni du septième cas de la classification donnée au n° 25. Montrons que le quatrième cas où Δ_d et δ_d sont finis et distincts ne peut se présenter que sur un ensemble sans épaisseur.

51. Application II. — *L'ensemble des points où une fonction ne possède pas de dérivée d'un certain côté et où d'autre part ses dérivés pour ce même côté sont finis est de mesure nulle.*

Cette proposition offre une grande analogie avec un théorème de M. Lebesgue : savoir que, si *dans tout un intervalle*, les dérivés extrêmes d'une fonction continue sont en chaque point *tous les quatre finis et s'ils sont sommables dans cet intervalle* (ou appartiennent à une fonction à variation bornée), l'ensemble des points où la dérivée n'existe pas est de mesure nulle sur ce même intervalle. Mais ici, nous ne supposons rien de connu sur les dérivés en dehors de l'ensemble où nous les considérons. Rien n'empêche qu'ailleurs, ils soient infinis, aussi souvent que le tolèrent les propriétés logiques des nombres dérivés. *A fortiori*, ne supposons-nous rien touchant la sommabilité de nos dérivés dans tout un intervalle, puisque nous les considérons exclusivement sur un certain ensemble, discontinu dans le cas le plus général. Enfin, nous n'admettons nullement qu'aux points de cet ensemble, les quatre dérivés soient finis. Il nous suffit que deux d'entre eux pour un même côté soient finis et distincts, le côté pouvant d'ailleurs varier d'un point à l'autre. Enfin, un peu plus loin, nous conclurons de l'existence sur un ensemble E de dérivés tous finis pour un même côté constant ou variable, à l'existence d'une dérivée bilatérale sur une pleine épaisseur de E, sans avoir besoin d'aucune hypothèse complémentaire sur les dérivés de la fonction pour le second côté aux points de E [1]. Observons, pour terminer, que nous établissons toutes ces propriétés des nombres dérivés sans faire appel à aucune notion de somme intégrale. Démontrons notre énoncé.

L'ensemble, épais par hypothèse, en tout point duquel, ou bien les dérivés extrêmes droits, ou bien les dérivés extrêmes gauches sont finis et distincts, se décompose en l'ensemble E où la première hypothèse est vérifiée, et en l'ensemble E′ où c'est la seconde. E et E′ peuvent d'ailleurs *a priori* avoir des points communs, mais l'un au moins est de mesure non nulle. Supposons que ce soit E. Alors, en

---

[1] M. Montel, utilisant un résultat contenu dans ma Note du 21 avril 1912 (*Comptes rendus*), a montré (*Id.*, 23 déc. 1912) l'existence d'une dérivée sur une pleine épaisseur de l'ensemble où les *quatre* dérivés extrêmes sont finis.

tout point de l'ensemble épais E, f possède partout deux dérivés extrêmes droits finis et distincts.

Désignons par $H_{n,p}$ l'ensemble des points de E satisfaisant à la double condition $\delta_d < \frac{p}{n} < \frac{p+1}{n} < \Delta_d$. Tout point x de E appartient à un ensemble $H_{n,p}$ pour au moins une valeur de p, quel que soit n supérieur à l'inverse de la différence positive $\Delta_d(x) - \delta_d(x)$. Les $H_{n,p}$ étant en infinité dénombrable, l'un au moins d'entre eux, soit H, est épais si E l'est. Désignons pour cet ensemble par h l'inverse du premier indice n et soit P_1 un ensemble parfait épais en lui-même agrégé à H. En tout point de P_1 on a

$$\delta_d < ph < (p+1)h < \Delta_d,$$

p étant un certain entier positif, négatif ou nul.

L'application du Second Théorème va être aisée.

Considérons les intervalles contigus à P_1 et l'oscillation relative de la fonction f sur chacun d'eux. Est-il possible que, pour toute valeur du nombre positif A, cette oscillation surpasse A dans des intervalles dont les extrémités forment un ensemble G(A) partout dense sur P_1? Non, car nous avons démontré (**40**) que, dans ce cas, l'ensemble des points où, de chaque côté, l'un au moins des dérivés est infiniment grand en valeur absolue, cet ensemble est partout dense sur P_1. Donc, Δ_d et δ_d étant finis sur P_1, pour une certaine valeur μ de A, il existe une portion P de P_1 ne contenant aucun point de $G(\mu)$. P_1 étant épais en lui-même, P l'est également. Dans tout intervalle contigu à P, l'oscillation relative de f est au plus égale à μ. Entre deux points quelconques α, β de P séparés par une épaisseur e de P, d'après les relations vérifiées par Δ_d et δ_d en tout point de P, la variation relative de f aura des limites fournies par le Second Théorème (*voir* le Tableau de la page 186) Δ_d surpassant $(p+1)h$, cette variation vaut au moins $(p+1)he - \mu(1-e)$. Pareillement, δ_d étant inférieur à ph, cette même variation est au plus $phe + \mu(1-e)$. On a donc l'inégalité $h < 2\mu\frac{1-e}{e}$, vérifiée pour deux points quelconques de P, e désignant l'épaisseur de P entre eux. Ceci est absurde, puisque, par des choix appropriés de α et de β, cette épaisseur peut être supposée aussi voisine de 1 qu'on le veut (**20**).

52. Il est donc établi que les cas 1°, 4°, 7° du n° **25** ne peuvent pour un côté ou pour un autre se produire que sur une épaisseur nulle. Si donc nous négligeons les ensembles minces il nous reste comme seuls possibles les cas désignés ainsi :

A : $\Delta_d = +\infty$, $\delta_d = -\infty$,	A′ : $\Delta_g = +\infty$, $\delta_g = -\infty$,
B $= +\infty$, δ_d fini,	B′ : $\Delta_g = +\infty$, δ_g fini,
C : $\Delta_d = \delta_d$ finis (dérivée droite finie),	C′ : $\Delta_g = \delta_g$ finis (dérivée gauche finie),
D : Δ_d fini, $\delta_d = -\infty$,	D′ : Δ_g fini, $\delta_g = -\infty$,

Peut-on associer indifféremment l'un des quatre cas gauches à l'un des quatre droits, ce qui nous donnerait 16 combinaisons possibles? L'application III du Second Théorème va nous permettre de constater que chaque cas de l'un des groupes s'allie à un cas bien déterminé de l'autre groupe, sauf éventuellement sur une épaisseur nulle.

53. Application III. — *L'ensemble des points où le dérivé supérieur d'un côté est $+\infty$ coïncide avec celui des points où le dérivé inférieur du côté opposé est $-\infty$, à une épaisseur nulle près.*

Il faut entendre par là que les quatre ensembles E, E_1, E_2, E_3 définis respectivement par les conditions suivantes : 1° $\Delta_d = +\infty$, $\delta_g > -\infty$; 2° $\delta_d > -\infty$, $\Delta_g = +\infty$; 3° $\delta_d = -\infty$, $\Delta_g < +\infty$; 4° $\Delta_d < +\infty$, $\delta_g = -\infty$, où les inégalités $m < +\infty$ ou $m' > -\infty$ désignent, la première un nombre m fini ou infini négatif, la seconde un nombre m' fini ou infini positif, ces quatre ensembles sont de mesure nulle. Supposons qu'il en soit autrement. L'un de ces ensembles est doué d'épaisseur. Supposons que ce soit le premier. E contient un ensemble parfait P_0 épais en lui-même et en chaque point duquel le dérivé supérieur droit est $+\infty$, le dérivé inférieur gauche étant fini ou infini positif. Soit u_n d'extrémités a_n, b_n, un contigu à P. Formons la variation relative inférieure de f sur u_n en deçà de b_n, soit $(u_n \text{ VR } b_n)_i$. Les points au voisinage desquels les nombres $(u_n \text{ VR } b_n)_i$ ne sont pas bornés inférieurement, forment un ensemble non dense sur P_0, sinon il y aurait

une portion de P_0 où l'ensemble $\delta_g = -\infty$ serait partout dense, conclusion contraire à notre hypothèse que cet ensemble n'a aucun point sur P. Il y a donc un nombre positif μ et une portion P de P_0 telle que les nombres $(u_n \mathrm{VR}\, b_n)_i$ relatifs aux contigus à P sont tous supérieurs à $-\mu$. D'ailleurs, puisqu'en tout point de P_0 il y a le dérivé droit $+\infty$, λ, borne inférieure de ce dérivé sur P, peut être pris aussi grand qu'on le veut. Nous aboutissons à une absurdité d'après le Second Théorème nous donnant entre les extrémités a et b de P une variation relative de f supérieure à $\lambda e - \mu(1 - e)$, μ étant fixe et λ aussi grand qu'on le veut.

On montre exactement de même que les trois autres ensembles E_1, E_2, E_3 sont sans épaisseur.

54. Tirons de cette proposition III la conséquence annoncée. Si le cas A est réalisé sur un ensemble épais α, l'ensemble α_1 des points de α où l'on n'aura pas $\delta_g = -\infty$ (à rapprocher de $\Delta_d = +\infty$) et l'ensemble α_2 agrégé à α et où l'on n'a pas $\Delta_g = +\infty$ (d'après $\delta_d = -\infty$) sont l'un et l'autre sans épaisseur. Donc l'ensemble α' où le cas A' est réalisé contient une pleine épaisseur de α. La réciproque est vraie. Donc, les cas A et A' ne peuvent se présenter isolément l'un de l'autre qu'en une épaisseur nulle. On montre exactement de même que le cas B ne s'isole de D', C de C', D de B' qu'en des épaisseurs nulles. Donc, *l'ensemble des points d'un segment se décompose, à une épaisseur nulle près, en quatre ensembles où sont réalisés respectivement les couples de cas* (AA'), (BD'), (CC'), (DB'). Nous allons montrer de plus que les dérivés finis paraissant dans les trois derniers couples sont nécessairement égaux entre eux, à une épaisseur exceptionnelle nulle près. Occupons-nous d'abord du cas particulièrement remarquable (CC') où nous avons une dérivée finie de chaque côté. L'ensemble des points où il y a une dérivée droite coïncide, à une épaisseur nulle près, avec celui où il y a une dérivée gauche. Mais on sait que l'ensemble des points où la dérivée droite et la dérivée gauche, supposées existantes, diffèrent l'une de l'autre est dénombrable (**27**). Donc :

55. Application IV. — *Si f possède en tout point d'un ensemble*

épais R *une dérivée finie d'un côté, elle possède une dérivée bilatérale sur une pleine épaisseur de* R.

Et par suite, en rapprochant ce résultat de la proposition II : *Si sur un ensemble épais* G, *f possède des dérivés finis pour un même côté, constant ou variable, f possède une dérivée bilatérale sur une pleine épaisseur de* G.

Enfin, établissons le théorème suivant, dont l'énoncé me paraît entièrement nouveau, non seulement comme les précédents par sa généralité, mais même par la relation qu'il exprime en certains nombres dérivés :

36. Application V. — *L'ensemble des points où un dérivé extrême, de rang et de côtés quelconques, est fini et différent du dérivé extrême de rang et de côté opposés aux siens, cet ensemble est mince.*

Il s'agit de montrer que l'ensemble E caractérisé par les conditions : Δ_g fini, $\delta_d \neq \Delta_g$, et les trois ensembles analogues définis en échangeant d'une part les lettres δ et Δ, d'autre part, les indices d et g, sont tous les quatre minces. Montrons-le, par exemple, du premier. Nous savons d'abord que l'ensemble : Δ_g fini avec $\delta_d = -\infty$, est mince (**35**) et aussi que l'ensemble $\Delta_g < \delta_d$ est dénombrable (**27**). Si donc E est épais, il le demeure encore si nous le réduisons à l'ensemble : δ_d fini $< \Delta_g$ fini. Nous pouvons par suite trouver, comme nous l'avons déjà expliqué, un nombre positif h et un entier p positif, négatif ou nul, tel que l'ensemble K ainsi conditionné :

$$\delta_d \text{ fini} < ph < (p+1)h < \Delta_g \text{ fini}$$

soit épais.

Soit P_1 un ensemble parfait épais en lui-même agrégé à K.

De ce que δ_d est fini sur P_1, je conclus que, u_n ou $a_n b_n$ désignant un contigu quelconque à P_1, l'ensemble des points de P_1 au voisinage desquels la variation relative inférieure de f sur u_n au delà de a_n n'est pas bornée inférieurement, est non dense sur P_1. Car, si les nombres $VR_i(f, a_n, u_n)$ étaient non bornés inférieurement en tout point de P_1 (ou d'une portion de P_1), il y aurait des dérivés droits infinis négatifs. De même l'ensemble des points où $(u_n VR b_n)_s f$ n'est pas

borné supérieurement est non dense sur P_1, parce que sur P_1 il n'y a pas de dérivé supérieur gauche infini positif. Il existe donc une portion P de P_1 et un nombre positif μ, tel que dans tout intervalle u_n contigu à P, on ait

$$(a_n \mathrm{VR}\, u_n)_i f > -\mu, \qquad (u_n \mathrm{VR}\, b_n)_s f < \mu.$$

D'ailleurs en tout point de P, les dérivés Δ_g et δ_d vérifient les inégalités caractérisant K. Donc, en consultant le Tableau de la page 186 aux quatrième et septième lignes, nous trouvons, α et β étant deux points quelconques pris sur P,

$$(p+1)\,h - \mu\,(1-e) \leqq (\alpha \mathrm{VR} \beta) f \leqq ph + \mu\,(1-e),$$

d'où

$$h < 2\mu\,\frac{1-e}{e},$$

relation impossible, μ et h étant fixes, tandis que e peut être rendu par un choix approprié de α et de β aussi voisin de 1 qu'on le veut.

CHAPITRE III.

RÉALISATION DES QUATRE CAS FONDAMENTAUX DES NOMBRES DÉRIVÉS.

57. Les cinq résultats essentiels établis par l'application du Second Théorème ne nous empêchent nullement d'admettre, et nous confirmerons cette opinion par des exemples effectifs, que, si un dérivé extrême d'un certain côté est fini sur un ensemble épais ou même sur une épaisseur pleine, le second dérivé extrême du même côté peut, sur des épaisseurs non nulles du premier ensemble, être aussi bien infini que fini. Mais, fait très remarquable, que l'un ou l'autre de ces deux derniers cas se présente, il y aura toujours du côté opposé à celui du premier dérivé un autre dérivé extrême égal à celui-ci (avec, bien entendu, l'exception possible d'un ensemble sans épaisseur).

Appelons *associés* deux dérivés extrêmes relatifs à un même côté; *opposés*, deux dérivés extrêmes relatifs à des côtés et à des rangs

différents, par exemple Δ_d et δ_g. Les cinq propositions résultant du Second Théorème se résument dans l'énoncé suivant :

Sauf aux points d'une épaisseur nulle, deux dérivés associés sont égaux s'ils sont finis (II), *inégaux si l'un au moins est infini* (I). *Deux dérivés opposés sont simultanément finis et égaux* (IV et V) *ou infinis et inégaux* (III).

De ceci résulte qu'*il n'y a de dérivé médian bilatéral que dans le cas* (AA') *où les dérivés extrêmes de chaque côté sont* $+\infty$ *et* $-\infty$, *et alors tout nombre fini est un dérivé bilatéral médian.* Ce cas est même le seul où il y ait au moins deux dérivés bilatéraux distincts, en négligeant toujours les ensembles minces (¹).

Nous désignons par [BD'], [CC'], [DB'] au lieu de (BD'), ..., les associations de dérivés exprimées par ces dernières parenthèses, mais en y supposant de plus les dérivés finis égaux entre eux. Pour montrer l'indépendance mutuelle des cas (AA'), [BD'], [CC'], [DB'], nous prouverons d'abord que, le troisième étant mis à part, chacun des trois autres peut être réalisé isolément sur un ensemble parfait épais, en dehors duquel la fonction possède une dérivée finie et continue;

(¹) Soient C la courbe représentative de la fonction continue f et M un point de C. Appelons *angle dérivé droit* (gauche) en M, l'angle formé par les positions limites des demi-droites joignant M à un point M' de C, d'abscisse supérieure (inférieure) à celle de M, et tendant vers celle-ci. En négligeant dans C un ensemble de points se projetant sur Ox en une épaisseur nulle, les angles dérivés latéraux A_d et A_g présentent nécessairement l'une des quatre dispositions simultanées suivantes. Soient Mz et Mz' respectivement les demi-parallèles à Oy ascendante et descendante menées par M.

1° A_d et A_g valent chacun deux droits et sont biadjacents, leurs côtés coïncidant avec Mz et Mz' (cas AA');

2° et 4° A_d et A_g sont non nuls, adjacents et supplémentaires, leur côté commun étant soit Mz (cas [BD']), soit Mz' (cas [DB']);

3° A_d et A_g sont nuls, portés par une même droite indéfinie (tangente) inclinée sur Oy (cas [CC']).

Si f possède une dérivée seconde généralisée, A_d et A_g sont opposés par le sommet. Les cas [BD'] et [DB'] ne peuvent se présenter.

ensuite, que les quatre cas peuvent être réalisés séparément sur une épaisseur pleine ou simultanément dans tout intervalle sur des épaisseurs non nulles. Enfin, nous rappellerons ce fait connu qu'une fonction peut avoir une dérivée (3e cas) coïncidant sur une épaisseur pleine avec une fonction continue quelconque sans différer par une simple constante de la primitive de cette dernière dans aucun intervalle.

58. Mais auparavant, examinons, d'après les théories précédentes, ce que l'on peut conclure de l'hypothèse d'une fonction continue f possédant en chaque point au moins un dérivé extrême fini φ. Nous supposons donc que φ coïncide en chaque point avec l'un des quatre dérivés extrêmes sans qu'on sache lequel, le côté et le rang de ce dérivé pouvant d'ailleurs changer d'un point à un autre. Soit P un ensemble parfait quelconque, continu ou discontinu. Nous pouvons énoncer, d'après le Premier Théorème, le résultat suivant :

Si f possède en tout point au moins un dérivé extrême fini, l'ensemble H *est non dense, des points de* P *au voisinage desquels simultanément les deux dérivés inférieurs de f sont non bornés inférieurement sur* P, *et les deux dérivés supérieurs sont non bornés supérieurement sur* P.

En effet, s'il en était autrement, il existerait une portion ϖ de P dont chaque point appartiendrait à l'ensemble fermé H. Alors, chacun des dérivés supérieurs serait $+\infty$ sur un résiduel de ϖ, chacun des dérivés inférieurs serait $-\infty$ sur un résiduel de ϖ. Ces quatre résiduels auraient en commun un résiduel de ϖ en chaque point duquel aucun des quatre dérivés extrêmes ne serait fini, ce qui est contraire à notre hypothèse que l'un d'eux coïncide avec la fonction finie φ. Donc, sur toute portion P_0 de P, il existe une portion P'_0 en tous les points de laquelle on a : ou bien $\Delta_d < m_1$, ou bien $\delta_d > m_2$, ou bien $\Delta_g < m_3$, ou bien $\delta_g < m_4$, m_1 ou m_2 ou m_3 ou m_4 étant fixes sur ϖ. Observons d'abord que, si P est le continu, les quatre dérivés extrêmes ayant même maximum et même minimum dans tout intervalle, on peut énoncer le résultat suivant :

Si φ nombre partout fini coïncide en tout point avec l'un ou l'autre des quatre dérivés extrêmes d'une fonction continue, l'ensemble K *des points au voisinage desquels φ n'est borné ni supérieurement ni inférieurement (sur le continu) est non dense sur le continu.*

Supposons que P diffère du continu. Faisons intervenir le Second Théorème. Le cas (AA′) n'est nulle part réalisé, puisqu'il ne comprend aucun dérivé extrême fini. Supprimons de *ab* l'ensemble η sans épaisseur où l'on n'a aucun des cas [BD′], [CC′], [DB′]. Alors, sur l'épaisseur pleine complémentaire E, en chaque point, les dérivés extrêmes finis coïncident entre eux, donc avec φ. Si donc un dérivé supérieur est borné supérieurement ou si un dérivé inférieur est borné inférieurement sur toute une portion de P, il en est exactement de même de φ considéré sur P hors de η. Enfin, tout point de η étranger à K étant intérieur à un intervalle où φ est borné soit supérieurement, soit inférieurement, réduisons η à sa partie η_1 commune avec K. Nous concluons ainsi notre analyse :

VI *bis. Si une fonction continue possède en tout point un dérivé extrême fini φ, de rang et de côté indifféremment variables, il est possible de négliger un certain ensemble mince et non dense sur le continu η_1, tel que,* P *étant un ensemble parfait quelconque, les points de* P *au voisinage desquels, sur* P *et hors de η_1, φ n'est borné ni supérieurement ni inférieurement, forment un ensemble non dense sur* P.

39. *Exemple III. — Réalisation sur un ensemble parfait discontinu épais en lui-même du cas* [BD′] avec une fonction possédant hors de cet ensemble une dérivée continue.

Montrons qu'il est possible à une fonction continue d'avoir, sur un ensemble de la nature dite, *pour dérivé supérieur droit $+\infty$, pour dérivé inférieur gauche $-\infty$, les deux autres dérivés étant finis et égaux, plus précisément nuls.* Soient P cet ensemble, a et b ses points extrêmes, $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ ses intervalles contigus. Choisissons f nul sur P. Sur chacun des u_n, faisons f positif, continu et pourvu

d'une dérivée continue à l'intérieur de u_n. A cette fin, la valeur y_n de f sur u_n se déduira d'une fonction $y(x)$ définie sur l'intervalle $0-1$ par transformation linéaire séparément de la variable et de la fonction. $y(x)$ aura pour nombre dérivé supérieur droit à l'origine $+\infty$, et pour dérivé inférieur gauche au point 1, $-\infty$. Posons

$$Y(x) = 4\sqrt{x(1-x)}.$$

Pour que, à l'origine et au point 1, les dérivés de $y(x)$, respectivement droit et gauche, non encore examinés soient nuls, nous multiplierons $Y(x)$ par une fonction oscillant de 0 à 1, avec une fréquence infinie aux deux extrémités du segment. Nous choisissons pour ce facteur

$$\sin^2 \frac{k}{x(1-x)},$$

et pour ne pas modifier le maximum de Y entre 0 et 1, correspondant à $x = \frac{1}{2}$, nous prenons

$$4k = \frac{\pi}{2}.$$

Soit donc

$$y(x) = 4\sqrt{x(1-x)}\,\sin^2 \frac{\pi}{8x(1-x)};$$

y est continu, jamais négatif, mais nul en une infinité de points admettant les deux valeurs limites 0 et 1; y a pour maximum l'unité qu'il atteint pour $x = \frac{1}{2}$; $y(x)$ a une dérivée finie et continue en tout point comprise entre 0 et 1. En zéro, ses nombres dérivés extrêmes, définis seulement à droite, sont 0 et $+\infty$. En 1, ses dérivés extrêmes gauches sont 0 et $-\infty$. Posons

$$y_n(x) = r_n y\left(\frac{x-a_n}{u_n}\right),$$

et portons notre attention sur le choix de r_n, que nous déterminons de la façon suivante : u_n est situé sur un certain segment compris entre deux éléments géométriquement consécutifs de la suite : point a, point b, intervalles $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Ce segment a une certaine lon-

gueur ρ_n. Prenons $r_n = \sqrt{\rho_n}$. Je dis que f, maintenant entièrement défini, satisfait aux conditions imposées à ses dérivés. D'abord, vérifions la continuité de f. ρ_n étant la longueur de l'un des segments conservés entre a et b, quand on a extrait de ab les intervalles contigus u_1, u_2, ..., u_{n-1}, ρ_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, puisque P ne contient par hypothèse aucun segment continu. Par suite, le maximum de f sur u_n, soit $r_n = \sqrt{\rho_n}$, tend vers zéro avec u_n. Donc, selon un résultat antérieur (**11**), f est continu en tout point du segment ab. En tout point extérieur à P, f coïncidant avec une fonction y_n est continu et possède une dérivée finie. Aux points de première espèce de P, f possède du côté opposé à P un nombre dérivé nul et un autre infiniment grand de signe conforme à l'énoncé du problème. Soit d'ailleurs ξ un point quelconque de P. $f(\xi)$ est nul. $f(x)$ étant positif ou nul, $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ n'est jamais négatif si x est à droite de ξ, jamais positif si x est à gauche de ξ. D'ailleurs, quel que soit ξ, il y a de part et d'autre de ξ une infinité de valeurs de x tendant vers ξ et où f est nul. Si ξ est de seconde espèce, ce sont entre autres les points de P tendant de l'un ou l'autre côté vers ξ. Si ξ est de première espèce et frontière de u_n, les x sont : du côté de ξ opposé à u_n, les points de P; du même côté que u_n, les points en infinité voisins de ξ et où s'annule $y_n(x)$. Donc, en tout point de P, le dérivé inférieur droit et le dérivé supérieur gauche sont nuls.

Passons aux deux autres dérivés. *Supposons ξ de seconde espèce.* La suppression progressive dans ab des intervalles u_1, u_2, ..., u_n, ..., laisse successivement ξ sur des segments $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$, ..., $\rho^{(p)}$, ..., dont chacun est compris dans le précédent, dont le nombre n'est pas limité, puisque P ne contient aucun segment continu, dont l'un d'eux enfin ne disparaît pour faire place au suivant à la suppression d'un intervalle contigu à P que si cet intervalle supprimé se trouve précisément lui appartenir.

Quand nous passons de $\rho^{(p)}$ à $\rho^{(p+1)}$, c'est que nous venons d'introduire à l'intérieur de $\rho^{(p)}$ un intervalle u_n sur lequel nous attribuons à f des valeurs non partout nulles, mais atteignant pour maximum précisément $\sqrt{\rho^{(p)}}$ en un certain point x_p (d'ailleurs milieu de u_n).

$|x_p - \xi|$ est inférieur à $\rho^{(p)}$. Donc,

$$\frac{f(x_p) - f(\xi)}{x_p - \xi} = \frac{\sqrt{\rho^{(p)}}}{x_p - \xi} = \frac{1}{\delta\sqrt{\rho^{(p)}}},$$

δ étant compris entre -1 et $+1$ et possédant le signe de $x_p - \xi$, donc étant positif ou négatif, selon que u_n est à droite ou à gauche de ξ. Or, est-il possible que ce signe soit invariable à partir d'une certaine valeur de p? Nullement. En effet, ξ étant supposé de seconde espèce, est intérieur à tous les segments $\rho^{(p)}$ le contenant, et étranger à tous les segments u_n. Est-il possible qu'à partir d'une certaine valeur k de p, l'intervalle u_n dont l'extraction de $\rho^{(p)}$ remplace le segment antérieurement conservé $\rho^{(p)}$ contenant ξ, par le segment $\rho^{(p+1)}$ contenant encore ξ, est-il possible que ces u_n soient tous d'un côté invariable de ξ? Non, car si les u_n considérés étaient tous par exemple à droite de ξ, entre l'extrémité gauche de $\rho^{(k)}$ et ξ, il n'y aurait jamais d'intervalle u_n extrait. Donc, le segment limité par ces deux points serait agrégé à P qui ne serait pas discontinu, contrairement à notre hypothèse. Donc, les u_n extraits successivement des $\rho^{(p)}$, opération substituant $\rho^{(p+1)}$ à $\rho^{(p)}$, sont tantôt d'un côté de ξ, tantôt du côté opposé, sans qu'il y ait évidemment aucune loi générale réglant cette alternance. Mais les points x_p, intérieurs aux u_n, sont eux aussi en infinité des deux côtés de ξ. Ils tendent vers ξ, puisque la longueur du segment $\rho^{(p)}$ contenant x_p tend vers zéro avec $\frac{1}{p}$. Donc, en ξ le dérivé supérieur droit est $+\infty$, le dérivé inférieur gauche est $-\infty$.

Si ξ est de première espèce dans P, ξ appartient pareillement toujours aux segments conservés au moment de la $n^{\text{ième}}$ opération consistant dans la suppression sur ab de u_n. ξ est donc comme tout à l'heure situé sur une suite de segments conservés $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \ldots, \rho^{(p)}, \ldots$; mais, comme il est extrémité d'un intervalle u_m, quand on supprime dans le segment $\rho^{(q)}$ auquel ξ est à ce moment intérieur, l'intervalle u_m, ξ devient extrémité de $\rho^{(q+1)}$. Il restera extrémité de tous les $\rho^{(q+h)}$ suivants et le côté de ξ où se trouveront ces segments sera le côté opposé à u_m, celui où il est limite de points de P. Si, par exemple, ξ est extrémité gauche de u_m, on aura $x_p - \xi < 0$, si u_n est extrait de $\rho^{(p)}$ en

supposant $p > q$, et par suite

$$\frac{f(x_p) - f(\xi)}{x_p - \xi} = -\frac{\sqrt{\rho^{(p)}}}{\xi - x_p} < -\frac{1}{\sqrt{\rho^{(p)}}}.$$

Donc, le dérivé inférieur gauche en ξ est $-\infty$, comme en tout autre point de P. (Nous avons déjà vu que le dérivé supérieur droit en ξ est $+\infty$, d'après le choix de f sur u_m). On montre exactement de même que le dérivé supérieur droit en toute extrémité droite d'intervalle contigu à P est, comme partout ailleurs sur P, $+\infty$. Les conditions annoncées sont donc partout réalisées sur P. Le changement de f en $-f$ nous donnerait sur P le cas [DB′]. La substitution de $-x$ à x changerait le signe des dérivés mais aussi leurs côtés, donc laisserait subsister le cas]BD′].

Une très légère modification à la construction précédente nous donnera le cas (AA′) sur le même ensemble P, la fonction ayant toujours hors de P une dérivé finie et continue en chaque point.

60. *Exemple IV. — Réalisation sur un ensemble épais en lui-même du cas* (AA′). — Choisissant toujours f nul sur P, nous faisons coïncider f sur u_n avec une fonction y_n ainsi définie dans cet intervalle. Prenons toujours

$$Y(x) = \sqrt{x(1-x)},$$

mais

$$y_0(x) = Y(x) \sin \frac{k}{x(1-x)},$$

k étant une constante numérique; y_0 possède un certain maximum positif μ et un certain minimum négatif $-\mu'$ atteints pour deux valeurs θ et θ' de x; $y_0(x)$, continu entre 0 et 1 et nul en ces deux points, a également une dérivée continue dans cet intervalle, sauf aux extrémités, où il a pour dérivés extrêmes vers l'intérieur $+\infty$ et $-\infty$. Nous posons

$$y_n = r_n y_0\left(\frac{x - a_n}{u_n}\right),$$

r_n étant choisi, comme il a été dit, égal à $\sqrt{\rho^{(p)}}$. Le maximum et le minimum de y_n sont respectivement $r_n\mu$ et $-r_n\mu'$ atteints en $a_n + \theta u_n$ et $a_n + \theta' u_n$, θ et θ' étant fixes. On verra sans aucune difficulté qu'en

tout point ξ limite de points de P d'un seul côté ou des deux, les quatre nombres dérivés extrêmes ont bien les valeurs $+\infty$ pour les deux supérieurs et $-\infty$ pour les deux inférieurs.

61. *Exemple V. — Fonctions réalisant les quatre cas fondamentaux, soit isolément sur des épaisseurs pleines, soit simultanément sur des ensembles partout épais.*

Nous utiliserons les fonctions auxiliaires suivantes. Appelons *fonction doublement nulle sur un ensemble parfait*, ou même simplement *fermé* H, une fonction nulle sur H et dans un rapport borné avec le carré de la distance de x à H, quand x n'appartient pas à H. Si x est situé dans l'intervalle u_n ou $a_n b_n$ contigu à H, selon que x est inférieur ou supérieur à $\frac{a_n + b_n}{2}$, la distance de x à H est $x - a_n$ ou $b_n - x$. Soit δ cette distance. Le quotient $\frac{\delta^2}{(x-a_n)^2(b_n-x)^2}$ est, dans l'un ou l'autre cas, $\frac{1}{(b_n-x)^2}$ ou $\frac{1}{(x-a_n)^2}$. H est compris entre $\frac{1}{u_n^2}$ et $\frac{4}{u_n^2}$. Une fonction doublement nulle sur H est donc égale sur u_n à $\lambda\frac{(x-a_n)^2(b_n-x)^2}{u_n^2}$, λ étant borné. Le maximum de $|\lambda|$ sera appelé le *coefficient relativement à* H *de cette fonction doublement nulle sur* H. Une fonction doublement nulle séparément sur divers ensembles fermés a, relativement à chacun d'eux, un coefficient propre.

L'expression $\frac{(x-\xi)(\xi'-x)}{\xi'-\xi}$ étant manifestement décroissante en $x-\xi$ et $\xi'-x$ supposés positifs, si f est une fonction doublement nulle sur H et de coefficient A, on a, pour toute valeur de x comprise entre deux points quelconques ξ et ξ' agrégés à H,

$$|f(x)| \leqq A\frac{(x-\xi)^2(\xi'-x)^2}{(\xi'-\xi)^2}.$$

De la définition de la double nullité de f sur H résulte que le quotient $\frac{f(x)-f(\xi)}{(x-\xi)^2}$ est borné, quels que soient ξ sur H et x indifféremment situé, et enfin que *f possède une dérivée nulle en tout point de* H.

62. Supposons le segment $0-1$ décomposé indifféremment en quatre ensembles E_1, E_2, E_3, E_4 partout ou non partout épais ou minces. Montrons la possibilité de définir une fonction f *réalisant respectivement sur une pleine épaisseur de* E_1, E_2, E_3, E_4 *chacun des quatre cas fondamentaux*. Si E_i $(1 \leq i \leq 4)$ n'est pas mince, nous le décomposons en une infinité dénombrable d'ensembles parfaits discontinus (**19**), épais en eux-mêmes, deux à deux distincts, $Q_i, Q_{i+4}, \ldots, Q_{i+4h}, \ldots$, augmentés d'un ensemble mince E'_i. Deux ensembles Q_m dont l'indice divisé par 4 donne deux restes différents appartiennent à deux ensembles E_i différents et sont eux aussi distincts. La réunion des ensembles Q_m constitue une épaisseur pleine. Désignons par P_m la réunion des ensembles $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$. Q_m est intérieur à certains contigus u_{m-1} (en nombre limité) de P_{m-1}. Soit Q^n_{m-1} la portion de Q_m située dans u^n_{m-1}. Nous allons montrer la possibilité de définir une fonction continue f réalisant le $i^{\text{ième}}$ cas fondamental sur Q_{i+4h} à la fois pour toutes les valeurs entières de h et les quatre indices i.

La fonction f sera définie comme étant la somme d'une série

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_m + \ldots.$$

Supposons que f_m soit une fonction : 1° doublement nulle sur P_{m-1} avec un coefficient inférieur à $\frac{1}{2^m}$; 2° réalisant sur Q_m le $i^{\text{ième}}$ cas fondamental si $m-i$ est divisible par 4; 3° possédant une dérivée finie en tout point étranger à P_m. Je dis que moyennant ces conditions : 1° la série f_m converge; 2° sa somme f est une fonction continue; 3° en tout point de Q_m, f réalise le même cas fondamental que f_m.

En effet, soit δ_m la distance de x à P_m. D'après la première hypothèse des f_m et l'inclusion de P_m dans P_{m+p}, on a toujours, que δ_m soit nul ou positif,

$$|f_{m+p}| \leq \frac{1}{2^{m+p}} \delta^2_m,$$

pour toute valeur entière et positive de p. $2\delta_m$ étant toujours inférieur à 1, la série f_m est évidemment uniformément convergente et sa somme f est une fonction continue. Posons

$$S_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n, \qquad R_n = f_{n+1} + \ldots,$$

nous avons

$$f = S_{m-1} + f_m + R_m.$$

S_{m-1} est la somme d'un nombre limité de fonctions dont chacune, d'après la troisième condition des f_m, est douée d'une dérivée finie en tout point étranger à P_{m-1}; car un tel point est *a fortiori* étranger à $P_1, P_2, \ldots, P_{m-2}$. Quant à R_m, d'après la limitation trouvée pour $|f_{m+p}|$, cette fonction est en valeur absolue inférieure à $\frac{1}{2^m}\delta_m^2$; elle est donc doublement nulle sur P_m et y possède la dérivée zéro. Donc, en tout point de l'ensemble simultanément agrégé à P_m et étranger à P_{m-1}, c'est-à-dire en tout point de Q_m, la différence $f - f_m$ possède une dérivée finie ρ. Si f_m réalise un des quatre cas fondamentaux en un point de Q_m, en ce point, f réalisera le même cas fondamental; car à un dérivé latéral infini de f_m correspond pour le même côté le même dérivé infini pour f, et à deux dérivés extrêmes finis et égaux pour f_m correspondent pour f les deux mêmes dérivés extrêmes finis et égaux.

La réalisation annoncée sera donc effective si nous savons, sur tout élément Q_{m-1}^n, former une fonction f_m présentant le cas fondamental désiré. Pour le cas [CC'] ($m = 3 + 4h$), nous posons $f_m = 0$. Pour les autres cas, désignons par $\psi(P)$ l'une des fonctions construites selon les règles des n^{os} **59** et **60**, et réalisant sur l'ensemble parfait P le cas (AA'), [BD'], [DB'] que l'on veut, $\psi(P)$ ayant d'ailleurs une dérivée finie et continue hors de P. On peut toujours supposer la valeur absolue de $\psi(P)$ inférieure à *un* en divisant cette fonction par un facteur convenable indépendant de x. Désignons par ψ_m^n le produit $\psi[Q_m^n] \times \frac{(x - a_m^n)^2 (b_m^n - x)^2}{(u_m^n)^2}$. ψ_m^n étant le produit de $\psi(Q_m^n)$ par un facteur continu, dérivable et positif à l'intérieur de u_m^n, réalise en tout point de cet intervalle, et en particulier en tout point de Q_{m+1}, le même cas fondamental que $\psi(Q_m^n)$ [1]. D'ailleurs ψ_m^n est doublement nul, de coefficient un au plus relativement au couple (a_m^n, b_m^n).

---

[1] f étant continue et douée d'une dérivée finie au point x, g étant au même point continue, considérons les propriétés différentielles du produit fg en ce même point. Si f est nul en x, fg possède la dérivée $f'g$ au même point et y réalise par suite le cas [CC']. Si $f(x)$ n'est pas nul, μ étant pour un des côtés un dérivé quelconque médian ou extrême de g, les nombres dérivés de fg se

Posons $f_m = 0$ sur tous les segments restant sur $0 - 1$ quand on en retranche les intervalles en nombre fini u''_{m-1} et $f_m = \frac{1}{2^m}\psi''_{m-1}$ sur u_{m-1}. Il est visible que la fonction f_m, complètement définie sur le segment $0 - 1$, vérifie les trois conditions exigées d'elle, et cela quel que soit le cas fondamental désigné pour être réalisé sur Q_m. La construction que nous avions en vue est donc effectuée.

63. *Exemple VI.* — Montrons qu'*une fonction peut avoir en tout point d'une épaisseur pleine une dérivée nulle* (cas [CC']) *sans être constante dans aucun intervalle.*

Considérons, en effet, sur deux segments : ab composé de points x, $\alpha\beta$ constitué de points ξ, deux ensembles parfaits admettant ces points extrêmes énoncés, le premier P_1 d'épaisseur supérieure à 0 sur ab, le second Π_1 de mesure nulle. Nous définissons comme nous l'avons expliqué (**10**) une première fonction $g(x)$ sur ab, une deuxième $\gamma(\xi)$ sur $\alpha\beta$, croissantes l'une sur P_1, l'autre sur Π_1, constantes $g(x)$ sur les segments contigus de P_1, $\gamma(\xi)$ sur ceux de Π_1, et prenant chacune, sur ces divers segments, l'ensemble e des valeurs rationnelles de la forme $\frac{k}{2^n}$ (k entier impair) positives et inférieures à μ. Les points de seconde espèce x de P_1 et ξ de Π_1 d'une part, les segments contigus à P_1 et ceux de Π_1 d'autre part, quand $g(x)$ et $\gamma(\xi)$ prendront sur eux les mêmes valeurs, seront par définition considérés comme éléments homologues des deux ensembles. Sur deux segments contigus homologues, nous faisons correspondre l'une à l'autre les extrémités de même côté. Alors, quel que soit x_1 agrégé à P_1, il lui correspond un nombre ξ_1 et un seul agrégé à Π_1, et réciproquement.

---

déduisent linéairement de μ, selon une formule, $\alpha\mu + \beta$, avec $\alpha = f$, $\beta = gf'$. Car, dans l'égalité

$$\frac{\Delta fg}{\Delta x} = g\frac{\Delta f}{\Delta x} + f\frac{\Delta g}{\Delta x} + \Delta g\frac{\Delta f}{\Delta x},$$

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ tend vers une limite finie f' et Δg vers zéro, quand Δx est infiniment petit. Donc si, en x, g réalise un des quatre cas fondamentaux, et si f est positif, fg réalise le même cas fondamental. Si f est négatif, les deux cas (AA'), [CC'] sont conservés, [BD'] et [DB'] sont échangés.

Deux nombres de P_1 ont pour homologues deux nombres de Π_1 offrant le même sens d'inégalité. A deux éléments (points ou intervalles) distincts de P_1, l'un gauche, l'autre droit, correspondent dans Π_1 deux éléments de même nature, le premier gauche, le second droit. Nous ne modifierons plus la correspondance des points de P_1 et de Π_1. Nous allons seulement répartir dans leurs contigus homologues de nouveaux ensembles que nous ferons correspondre entre eux comme P_1 et Π_1. On peut supposer que l'on donne les mêmes numéros d'ordre aux intervalles contigus u_1^n et ω_1^n correspondants dans les deux ensembles. Alors, si u_1^p et u_1^q sont contigus à P_1, u_1^p étant à gauche de u_1^q, ω_1^p est encore à gauche de ω_1^q. Sur chaque segment contigu à P_1, d'extrémités a_n^1, b_n^1, ayant pour correspondant $\alpha_1^n\beta_1^n$ contigu à Π_1, nous plaçons un ensemble parfait P_2^n de points extrêmes a_1^n, b_1^n, de mesure supérieure à $\theta.a_1^n b_1^n$. Plaçons de même sur $\alpha_1^n\beta_1^n$ un ensemble parfait Π_2^n de mesure nulle et d'extrémités α_1^n, β_1^n.

Nous pouvons établir entre les points de P_2^n et ceux de Π_2^n d'une part, entre leurs intervalles contigus d'autre part, une correspondance respectant la disposition des éléments homologues. P_2^n ayant pour extrémités a_1^n, b_1^n, tout point de l'intervalle $a_1^n b_1^n$ est soit agrégé à P_1^n, soit intérieur à un contigu (et non pas un semi-contigu) de cet ensemble. Il en est de même pour tout point de l'intervalle $\alpha_1^n\beta_1^n$ relativement à Π_2^n. Tout point de ab est soit agrégé à l'ensemble parfait P_2 réunissant P_1 et les P_2^n, soit intérieur à un contigu de l'un des P_2^n (de même les contigus de l'ensemble Π_2 réunissant Π_1 et les Π_2^n sont exclusivement les contigus à ces derniers ensembles). Dans le premier cas, le point x_2 de P_2 a un homologue ξ_2 sur Π_2. Dans le second cas, le point x' étranger à P_2 est intérieur à un contigu u_2^m de l'un des P_2^n. Son homologue ξ' n'est pas encore défini. Mais il sera intérieur à ω_2^m contigu à Π_2^n homologue de u_2^m. Il est facile de voir que deux éléments t, t' points ou contigus de P_2 ont des homologues τ, τ' de même nature présentant la même disposition. Cela est évident si t et t' sont l'un et l'autre identiques ou agrégés à des éléments distincts, points ou contigus de P_1 d'après la croissance de la correspondance établie entre points et contigus de P_1, d'une part, points et contigus de Π_1 d'autre part. Les seuls autres cas sont ceux où t et t'

supposés distincts sont agrégés au même contigu u_1^n à P_1, auquel cas ce sont des éléments distincts d'un même ensemble parfait P_2^n et leurs homologues τ, τ', agrégés à ω_1^n, sont des éléments de même nature de Π_2^n. Or, les caractères de la correspondance (P_2^n, Π_2^n) maintiennent la même conclusion.

Nous allons maintenant définir deux suites d'ensembles parfaits $P_3, P_4, \ldots, P_r, \ldots$ sur ab, $\Pi_3, \Pi_4, \ldots, \Pi_r, \ldots$ sur $\alpha\beta$, et les explications précédentes nous permettront d'aboutir plus vite aux conclusions. Chacun des P_r d'une part, chacun des Π_r d'autre part, contient les précédents et est agrégé à tous les suivants. Supposons réalisée entre les éléments, points et contigus de P_r, et ceux de Π_r une correspondance croissante biunivoque et réciproque. Soient u_r^n et ω_r^n deux segments contigus homologues quelconques de P_r et Π_r. Formons deux ensembles parfaits discontinus P_{r+1}^n et Π_{r+1}^n, ayant respectivement mêmes points extrêmes que les segments u_r^n et ω_r^n, le premier d'épaisseur supérieure à θ sur u_r^n, le second métriquement nul, mais avec des contigus toujours inférieurs en longueur à $\frac{1}{r}$. Établissons une correspondance du type maintes fois énoncé entre les éléments de P_r^n et ceux de Π_r^n. Si P_{r+1} est la réunion de P_r et des P_{r+1}^n, si Π_{r+1} réunit Π_r et les Π_{r+1}^n, les correspondances établies entre les points de P_r et de Π_r, entre les éléments, points ou contigus des P_{r+1}^n et ceux des Π_{r+1}^n, constituent une correspondance entre les éléments, points ou contigus de P_{r+1} et les éléments de même nature relatifs à Π_{r+1}, avec conservation de la disposition; on le montre comme pour $r+1=2$. L'homologue d'un point x_r de P_r restant le même quand on considère x_r comme agrégé à P_{r+1}, cet homologue reste le même quand on considère x_r dans P_{r+p}, quel que soit p. Cet homologue est toujours un point ξ_r de Π_r. Et réciproquement quand on passe d'un point de Π_r à un point de ab. Le complémentaire de P_{r+1} a sur ab une épaisseur inférieure à celle du complémentaire de P_r multipliée par $(1-\theta)$. La première est donc inférieure à $(1-\theta)^{r+1}$. De même, le complémentaire de Π_r est constitué d'intervalles dont le plus grand est inférieur à $\frac{1}{r}$. Soient donc P et Π les ensembles réunissant respectivement les P_r et les Π_r. P est une pleine épaisseur de ab. Π_r, au contraire,

est mince, mais son complémentaire ne contient aucun intervalle puisque le plus grand contigu à H_r est inférieur à $\frac{1}{r}$. Donc, P et H sont partout denses, le premier sur ab, le second sur $\alpha\beta$. D'ailleurs, P et H sont gerbés. Leurs complémentaires par rapport à ab et $\alpha\beta$, C et Γ, l'un et l'autre résiduels, sont partout denses, et le premier mince, le second pleinement épais. Un point quelconque de P appartient à un certain P_r et à tous les suivants. Son homologue dans H_r et dans tous les ensembles suivants est un certain point invariable de H, et réciproquement. Le premier et ce dernier, x et ξ, seront considérés comme homologues dans P et H. De plus, si $x < y$, x et y étant agrégés à P, donc respectivement à deux ensembles P_q et P_s, donc à P_{q+s} et à tous les suivants, x et y ont dans H des homologues ξ, η dont le premier est le plus petit. Et réciproquement. La correspondance de P et de H conserve donc la disposition mutuelle des points. P et H étant partout denses sur ab et $\alpha\beta$, si x' est un point de C, x' détermine une coupure entre les points de P situés à sa gauche et ceux qui sont placés à sa droite, et x' est la borne commune de ces deux classes c_1 et c_2, dont la première n'a donc pas d'élément le plus à droite, ni la seconde d'élément le plus à gauche. Les classes γ_1 et γ_2 constituées des points de H homologues de c_1 et de c_2 sont de même la première entièrement à gauche de la seconde. La première n'a aucun élément le plus à droite ni la seconde aucun élément le plus à gauche. Comme l'ensemble $\gamma_1 + \gamma_2 = H$ est partout dense, γ_1 et γ_2 sont séparées par une borne commune ξ' étrangère à H, donc agrégée à Γ. Les points de C et de Γ se correspondent réciproquement et univoquement. On pourrait encore établir ainsi leur correspondance : x' n'appartenant à aucun P_m appartient, quel que soit m, à un intervalle contigu à P_m, soit $u_m(x')$. A ce dernier correspond un intervalle ω_m contigu à H_m; $u_{m+p}(x')$ étant intérieur à $u^m(x')$, ω_{m+p} est intérieur à ω_m. D'ailleurs, la longueur de ω_m tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$. Donc, les ω_m ont en commun un point et un seul, ξ'.

65 *bis*. Nous avons donc réalisé une correspondance $\xi = f(x)$ où maintenant nous faisons varier x arbitrairement sur ab dans P ou dans C et en même temps ξ entre α et β, sur H ou sur Γ. $f(x)$ est une

fonction croissante et continue ([1]) dans tout intervalle et elle transforme une pleine épaisseur de ab, savoir P, en un ensemble de mesure nulle H et inversement un ensemble mince C en Γ, épaisseur pleine de $\alpha\beta$. Nous allons montrer que $f(x)$ a une dérivée nulle sur une pleine épaisseur de ab.

D'abord, f étant croissant dans tout intervalle, l'ensemble des points où $f(x)$ n'a pas une dérivée nulle, cet ensemble existe. Je dis qu'il est mince. S'il en était autrement, il y aurait un ensemble E épais, en chaque point duquel un dérivé supérieur de f serait positif. Comme nous l'avons expliqué souvent, il existe alors un nombre positif λ et un ensemble épais E_1 en chaque point duquel l'un des deux dérivés supérieurs, le droit par exemple, surpasse λ. E^n désignant la partie commune à E_1 et à P_n, tous les E^n ne sont pas sans épaisseur, puisque E_1 est la somme des E^n et de l'ensemble commun à E_1 et à C, ensemble mince. Soient donc E^m un ensemble épais et H un ensemble parfait épais en lui-même agrégé à E^m, donc à P_m. En tout point de H, le dérivé supérieur droit surpasse λ.

D'après le Second Théorème, f étant croissant dans tout intervalle contigu à H, entre deux points quelconques a' et b' de H, séparés par une épaisseur e de cet ensemble, la variation relative de f surpasse λe. Ou encore, la variation simple de f entre ces deux points a' et b' surpasse λl, l étant la mesure de H entre ces deux points.

En retranchant de $\alpha\beta$ un certain nombre d'intervalles contigus à η, ensemble parfait homologue de H, et par suite agrégé à H_m, nous rassemblons η sur un certain nombre de segments dont chacun a ses extrémités sur η et dont la longueur totale est aussi petite que l'on veut, puisque la mesure de η est nulle, comme celle de H_m. Mais chacun de ces segments $\alpha'_i\beta'_i$ représente la variation de f entre les points homologues a'_i, b'_i de H et surpasse par conséquent λl_i, l_i étant la mesure de H entre a'_i et b'_i. La longueur totale de ces segments surpasse donc $\lambda\Sigma l_i$ et enfin λL, L étant la mesure de H. Ceci est absurde, cette somme pouvant être supposée aussi petite que l'on veut et L étant par contre positif.

([1]) Une fonction croissante dans un intervalle, et qui peut dans cet intervalle coïncider avec tous les nombres compris entre ses valeurs extrêmes, est continue.

La fonction $f(x)$ n'a donc de dérivé supérieur positif qu'en un ensemble mince. Partout ailleurs, donc sur une épaisseur pleine, comme elle est croissante, elle a pour dérivée zéro.

64. Soit $\theta(u)$ une fonction définie dans l'intervalle $0 - 1$ décrit par u, et possédant en tout point des nombres dérivés finis. Alors, la fonction $\theta[f(x)] = \psi(x)$ admet pour dérivés en x, où f prend la valeur u et a une dérivée, tous les nombres obtenus en multipliant les divers dérivés médians ou extrêmes de $\theta(u)$ par $f'(x)$. Donc en tout point x de l'intervalle ab, sauf en un ensemble mince Γ, $\psi'(x)$ existera et sera nul. Nous verrons [1] la possibilité que $\theta(u)$ ait une dérivée finie à signe variable dans tout intervalle. Alors, dans tout intervalle, $\psi(x)$ ne sera ni constant ni doué d'un sens de variation déterminé et cependant $\psi(x)$ aura une dérivée nulle sur une épaisseur pleine.

En tout cas, il est acquis dès à présent qu'une fonction continue possédant une dérivée nulle sur une épaisseur pleine admet dans tout intervalle une indétermination au moins aussi grande que celle d'une fonction arbitraire à nombres dérivés finis. Donc, la connaissance d'une fonction finie φ qu'une fonction inconnue f est assujettie à posséder pour dérivée sur une épaisseur pleine ne particularise que très vaguement f. Mais si f joint à ce premier caractère un second défini dans une autre Partie de ce Mémoire (savoir d'être « résoluble »), f est entièrement déterminé à une constante additive près.

Exemple de fonction en tout point variante et douée d'un dérivé latéral médian ou extrême nul.

65. Les fonctions de Weierstrass et de M. Darboux, fournies par des développements trigonométriques remarquables, réalisent, comme il est facile de le voir, le cas fondamental (AA') des nombres dérivés sur une épaisseur pleine, en dehors de laquelle on a partout le dérivé $+\infty$ pour un côté et le dérivé $-\infty$ pour l'autre, ces côtés étant

(1) Dans la seconde Partie de ce travail, appelée sans doute à paraître au *Bulletin de la Société mathématique* pour 1915.

évidemment variables dans tout intervalle. Nous allons chercher dans les mêmes types d'expressions, des fonctions possédant en tout point, au moins pour un côté, le dérivé médian ou extrême zéro. Les premières fonctions n'avaient évidemment de dérivée, même unilatérale, finie en aucun point d'aucun côté. Elles n'ont davantage de dérivée bilatérale infinie en aucun point. Mais, *a priori*, rien n'empêche qu'en certains points (d'un ensemble forcément mince) elles ne possèdent à la fois la dérivée $+\infty$ d'un côté et la dérivée $-\infty$ de l'autre. Cette dernière possibilité elle-même sera évidemment exclue, pour nos fonctions possédant en chaque point au moins d'un côté le dérivé médian ou extrême zéro. Cependant il ne serait pas absurde que notre exemple comportât en certains points (d'un ensemble forcément mince et gerbé, donc rare aux deux points de vue métrique et descriptif) une dérivée infinie, mais pour un seul côté bien entendu. Je laisse au lecteur le soin de rechercher s'il est possible pour une fonction de n'avoir en aucun point ni pour aucun côté de dérivée finie ni infinie, et, en cas de réponse affirmative, de trouver des exemples particuliers dans une telle classe de fonctions.

Les fonctions que nous allons considérer, sommes de séries de termes

$$a_n \cos(b_n \pi x + \alpha_n),$$

tireront uniquement leurs propriétés des ordres de croissance ou de décroissance en n, des nombres b_n et a_n. Des choix plus particuliers des b_n et des α_n permettraient $\Big($comme dans l'exemple de Weierstrass où α_n vaut $-\frac{\pi}{2}$, b_n étant la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un entier impair$\Big)$ d'obtenir les mêmes propriétés différentielles de f avec des ordres de croissance légèrement réduits pour b_n et a_n. Nous ne porterons pas notre attention sur ces points de détail. Supposant les a_n *positifs*, nous prendrons $\alpha_n = 0$. Le lecteur se rendra compte de la persistance des conclusions obtenues ci-dessous, quand on donne à α_n toute autre valeur indépendante de x. Dans la suite de ce paragraphe, il sera question de nombres infiniment grands ou infiniment petits. Ce seront toujours des fonctions de n et il sera sous-entendu une fois pour toutes que leur caractère d'infinitude se présente quand l'entier n croît indéfiniment.

Nous supposerons toujours *la série* a_n *convergente*. La série $a_n \cos b_n x$ est donc uniformément convergente et sa somme $f(x)$ est une fonction continue de x. Nous appelons *terme principal* d'ordre n, le $n^{\text{ième}}$ terme et *abscisses principales* d'ordre n, les valeurs de x rendant maximum ou minimum le terme principal de même ordre, donc les valeurs $\frac{k}{b_n}$, k étant un entier. Les points correspondants de la courbe C d'équation $y = f(x)$ seront appelés *sommets principaux d'ordre* n, *supérieurs* si k est pair, *inférieurs* pour k impair. Nous poserons

$$a_1 \cos b_1 \pi x + \ldots + a_n \cos b_n \pi x = S_n(x), \qquad a_{n+1} \cos b_{n+1} \pi x + \ldots + = r_n(x),$$

donc

$$f(x) = S_{n-1}(x) + a_n \cos b_n \pi x + r_n(x).$$

Le choix des a_n et b_n sera guidé par cette idée que, les $n-1$ premiers termes de $f(x)$ étant fixés, si b_n est pris de plus en plus grand, entre deux abscisses principales consécutives d'ordre n, S_n diffère de son dernier terme par une fonction de plus en plus assimilable à une expression linéaire (ou à un trinome du second degré), et que, d'autre part, en bornant à notre gré ρ_n, le reste $r_n(x)$ modifiera d'aussi peu que nous voudrons en valeur absolue la validité de cette approximation de f.

1° Cherchons d'abord une condition suffisante pour que $f(x)$ ne possède en aucun point une dérivée finie. Il en sera certainement ainsi dès que f possédera en tout point un nombre dérivé infini. Soient M_k et M_{k+1} deux sommets principaux consécutifs d'ordre n. Il est facile d'obtenir que la pente de $M_k M_{k+1}$ soit infiniment grande avec n et positive si le premier sommet est inférieur, négative s'il est supérieur. Car, x_k étant l'abscisse de M_k, en supposant d'abord k impair (M_k est un sommet inférieur), la variation de $a_n \cos b_n \pi x$ de x_k à x_{k+1} est $2a_n$. La dérivée de $S_{n-1}(x)$ étant inférieure en valeur absolue à πT_{n-1}, avec

$$a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = T_n,$$

la variation absolue de S_{n-1} entre x_k et $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{b_n}$ est inférieure

à $\frac{\pi}{b_n} T_{n-1}$ et celle de $r_n(x)$ l'est à $2\rho_n$. La variation de f de x_k à x_{k+1} surpasse donc

$$2a_n - \frac{\pi}{b_n} T_{n-1} - 2\rho_n.$$

Si k était pair, cette même variation serait inférieure à l'expression précédente changée de signe. La condition imposée à la pente de $M_k M_{k+1}$ est donc que

$$2(a_n - \rho_n) b_n - \pi T_{n-1} = u_n$$

soit infiniment grand positif.

Si nous posons

$$a_n = a^n, \quad b_n = b^n,$$

a_n devant d'abord surpasser ρ_n, il faut que a soit inférieur à $\frac{1}{2}$; il faut ensuite visiblement que ab surpasse l'unité. Dès lors, le quotient de u_n par $(ab)^n$ tend vers

$$2\frac{1-2a}{1-a} - \frac{\pi}{ab-1}$$

qui doit être positif, ce qui nous donne la condition

$$ab > 1 + \frac{\pi}{2}\frac{1-a}{1-2a}.$$

Si nous prenons, comme dans l'exemple de Weierstrass pour b, un entier impair et pour α_n la valeur $-\frac{\pi}{2}$, et non point la valeur zéro, toute abscisse principale d'une ordre n le demeure pour tous les ordres suivants : $r_n(x)$ aura en ces points une valeur immédiatement calculable et ne contrariant pas au maximum la variation du terme principal entre x_k et x_{k+1}. D'où la possibilité de réduire le minimum de b, pour une valeur donnée de a (¹).

(¹) Soit

$$f(x) = \sum_1^\infty a^n \cos b^n \pi x,$$

b étant un entier. Si b est impair, tout sommet principal supérieur ou inférieur d'ordre n, reste principal et de même espèce pour tous les ordres $n+p$ supé-

Supposons donc vérifiée la condition : u_n infiniment grand positif avec n. Je dis qu'en tout point x, f aura un nombre dérivé infini. M étant le point figuratif de f en x, montrons la possibilité de joindre M à un sommet M_h d'ordre n, infiniment voisin de M pour n infini, et tel que la pente de MM_h surpasse u_n en valeur absolue. Si x est abscisse principale d'ordre n, et coïncide avec x_k, nous pouvons prendre h égal à $k-1$ ou à $k+1$ à notre gré. Si x n'est pas abscisse principale d'ordre n, x appartient à un intervalle $x_k x_{k+1}$. Les pentes des droites MM_k et $M M_{k+1}$ comprennent entre elles la pente de $M_k M_{k+1}$. (Car dans le triangle $MM_k M_{k+1}$ la parallèle menée par M au côté opposé appartient à l'angle de sommet M extérieur au triangle.) L'une des deux premières est donc supérieure en valeur absolue à u_n. M_h est

---

rieurs au premier. Dans u_n, ρ_n s'ajoute à a_n au lieu d'en être retranché. Le reste $r_{n-1}(x)$ vaut en un sommet supérieur d'ordre n, $\frac{a^n}{1-a}$, et $-\frac{a^n}{1-a}$ en un sommet inférieur. Il y aura donc une pente $M_k M_{k+1}$ infiniment grande du signe de $(-1)^{k+1}$, si

$$ab > 1 + \frac{\pi}{2}(1-a)$$

et alors, en tout point, f, ayant un dérivé infini, sera certainement dépourvu de dérivée bilatérale finie.

De même la condition (plus avantageuse que celle de Weierstrass si a est voisin de 1),

$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2}(1-a),$$

nous donne certainement en tout point l'association du dérivé $+\infty$ pour un côté et du dérivé $-\infty$ pour l'autre.

Si b était un entier pair, tout sommet principal supérieur ou inférieur d'ordre n serait principal supérieur pour tout ordre $n+p$. $r_n(x)$ serait indépendant de k et la variation de $r_n(x)$ de x_k à x_{k+1} est nulle. Dans u_n, ρ_n peut être supprimé. La présence d'un dérivé infini en tout point, celle du dérivé $+\infty$ d'un côté et en même temps du dérivé $-\infty$ de l'autre sont assurées respectivement avec les conditions

$$ab > 1 + \frac{\pi}{2}, \qquad ab > 1 + \frac{3\pi}{2},$$

sans hypothèse sur la parité de b (ou plutôt dans l'hypothèse la plus défavorable).

défini dans tous les cas. Donc les variations relatives de f entre x et x_h admettent, pour n infini, au moins une valeur limite infinie. $x - x_h$, positif ou négatif, est inférieur à $\frac{1}{b_n}$ et par suite infiniment petit. Il y a donc en x au moins un nombre dérivé infini pour au moins un côté.

2° Montrons que, u_n étant supposé positif et infiniment grand, en général $f(x)$ aura sur une épaisseur pleine les dérivés extrêmes bilatéraux $+\infty$ et $-\infty$. Posons, pour chaque valeur de n, où x n'est pas une abscisse principale, $x = \frac{k+\theta}{b_n}$, θ étant positif et inférieur à 1. Supposons par exemple k pair. Cherchons les valeurs de θ telles que $M_{k-1}M$ ait une pente infiniment grande avec n et positive. En bornant convenablement la variation de $S_{n-1}(x)$, celle du terme principal d'ordre n, celle de $r_n(x)$, on voit que cette pente excède

$$\frac{b_n}{1+\theta}\left[-\frac{1+\theta}{b_n}\pi T_{n-1} + 2a_n \cos^2\frac{\pi\theta}{2} - 2\rho_n\right] = \varpi_n.$$

ϖ_n, se réduisant à u_n pour $\theta = 0$, est positif et infiniment grand pour cette valeur particulière de θ. Supposons que ϖ_n (d'ailleurs décroissant en θ) garde ces derniers caractères pour toute valeur de θ positive et au plus égale à un certain nombre θ' (nécessairement inférieur à 1) indépendant de n. Posons $\varpi'_n = \varpi_n(\theta')$. Formons, pour toutes les valeurs paires de k, les segments $\frac{k+\theta'}{b_n}$ à $\frac{k+1}{b_n}$. Ces segments i_n en nombre égal à b_n ont entre 0 et 1 une longueur totale égale à $1-\theta'$. Soit I_n leur ensemble. Quand n croît indéfiniment, l'épaisseur de I_n sur un intervalle fixe quelconque i tend visiblement vers $1-\theta'$. Donc, quel que soit ε, assez petit toutefois pour rendre inférieur à 1 le produit $(1-\theta')(1+\varepsilon) = \omega$, on peut à tout entier m faire correspondre un autre entier p tel que les parties communes à I_m et aux i_{m+p} constituent une fraction des i_m inférieure à ω (ou encore : tel que I_{m+p} ait sur I_m une épaisseur inférieure à ω). Soit I'_m l'ensemble (composé uniquement de segments et points isolés) commun à I_m et à I_{m+p}. I'_m a sur le segment $0-1$ une épaisseur inférieure à $(1-\theta')\,\omega < \omega^2$. Nous pouvons de même déterminer p' de façon que $I_{m+p'}$ ait sur l'ensemble I'_m une épaisseur totale inférieure à ω. I''_m ensemble commun à $I_{m+p'}$ et à I'_m ou à I_m, I_{m+p}, $I_{m+p'}$, aura sur le segment $0-1$ une épaisseur inférieure à ω^3. Par une progression d'idées évidente, on voit que les

points communs à tous les I_{m+h} d'indice au moins égal à m forment un ensemble mince J_m.

Soit J la réunion de tous les J_n. J est mince. Soit x un nombre étranger à J. x n'appartient à aucun J_n. Donc, quel que soit n, x est non commun à tous les ensembles $I_n, \ldots, I_{n+p}, \ldots$. Donc les indices n tels que x soit étranger aux I_n correspondants sont en infinité. Donc, pour une infinité de valeurs de n, x peut se mettre sous la forme $\frac{k+\theta}{b_n}$ avec $0 < \theta < \theta'$. Pour cette suite particulière de valeurs de n, la pente de $M_{k-1}M$ surpasse ϖ'_n et tend donc vers $+\infty$. Donc, en x, f possède le dérivé gauche $+\infty$. Les points analogues à x contiennent le complémentaire de J, donc forment une épaisseur pleine. En échangeant les deux parités de k, les points M_{k-1} et M_{k+2}, on montre l'existence sur une épaisseur pleine d'un dérivé infini de signe et de côté donnés indifféremment. Donc, le cas (AA′) est réalisé par f sur une épaisseur pleine. D'ailleurs, une épaisseur pleine étant un ensemble dense, le cas fondamental (AA′) est aussi réalisé sur un résiduel. L'ensemble des points où ce cas ne se présente pas est donc non seulement mince, mais même gerbé.

Les conclusions précédentes valent en particulier avec les hypothèses $a = a^n$, $b = b^n$ et les choix de a et de b donnant à u_n une partie principale $Aa^n b^n$, où A est un coefficient positif (*voir* p. 212 et sa note).

3° Formons la condition pour que la pente de la droite $M_{k-1}M_{k+2}$, joignant deux sommets dont les rangs diffèrent de trois unités et sont par suite d'espèce différente, soit infiniment grande avec n, et du signe de $(-1)^{k+1}$ (de ces deux sommets, le supérieur aura donc une ordonnée plus grande que l'inférieur). Il suffit pour cela, on le voit comme dans le premier paragraphe, que l'expression

$$2(a_n - \rho_n)b_n - 3\pi T_{n-1} = c_n$$

soit infiniment grande positive avec n.

Si l'on fait

$$a_n = a^n, \qquad b_n = b^n,$$

a étant de plus supposé inférieur à $\frac{1}{2}$, on trouve que cette condition

sera vérifiée si

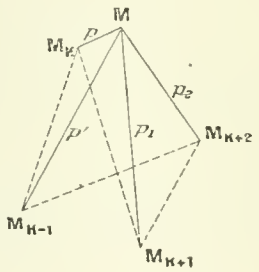
$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2}\,\frac{1-a}{1-2a}.$$

Dans l'exemple de Weierstrass, grâce au choix des α_n, le coefficient de $\frac{3\pi}{2}$ peut être remplacé par l'unité, quel que soit a inférieur à 1 (*voir* la note de la page 212).

Je dis que, dans l'hypothèse : ε_n infiniment grand positif avec n, $f(x)$ possède en tout point le dérivé $+\infty$ d'un côté et le dérivé $-\infty$ de l'autre.

Soient en effet x un nombre quelconque et M le point figuratif de f en x. Si x est une abscisse principale d'ordre n et coïncide avec x_k, les deux droites $M_{k-1}M$ et MM_{k+1} ont des pentes de signes contraires,

Fig. 1.



l'une et l'autre supérieures en valeur absolue à ε_n. Si l'abscisse x n'est point principale d'ordre n, x appartient à un certain intervalle $x_k x_{k+1}$. Je dis que l'une au moins des pentes p' et p de $M_{k-1}M$ et M_kM est infiniment grande avec n, et aussi l'une des pentes p_1 et p_2 de MM_{k+1} et MM_{k+2}, et enfin que la première et la seconde peuvent être choisies de signes opposés.

Montrons d'abord que l'une au moins des pentes de $M_{k-1}M$ et M_kM est infiniment grande. En effet,

$$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}} = \frac{f(x)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}} - \frac{f(x)-f(x_k)}{x_k-x_{k-1}}.$$

Le premier membre étant infiniment grand avec n, l'un au moins des deux quotients du second membre est lui aussi infiniment grand. Donc, $x-x_k$ et $x-x_{k-1}$ étant positifs et inférieurs, le premier à x_k-x_{k-1},

le second à $2(x_k - x_{k-1})$, l'un au moins des nombres p' et p est bien lui-même infiniment grand avec n. De même l'un au moins des nombres p_1 et p_2 est infiniment grand avec n. D'ailleurs, x étant compris entre x_k et x_{k+1}, les pentes p et p_1 comprennent entre elles celle de $M_k M_{k+1}$, et de même x étant situé entre x_{k-1} et x_{k+2}, les pentes p' et p_2 comprennent entre elles la pente de $M_{k-1} M_{k+2}$. D'ailleurs les pentes de $M_k M_{k+1}$ et de $M_{k-1} M_{k+2}$ sont infiniment grandes et de signes contraires, surpassant en valeur absolue respectivement u_n et v_n. Supposons par exemple k pair. L'un des nombres p et p_1 est inférieur à $-u_n$. De même, de p' et de p_2, l'un surpasse v_n. En résumé, sont infiniment grands en valeur absolue, d'une part l'un des nombres p' et p, d'autre part l'un des nombres p_1 et p_2; l'un des nombres p' et p_2 est infiniment grand positif, l'un des nombres p et p_1 est infiniment grand négatif.

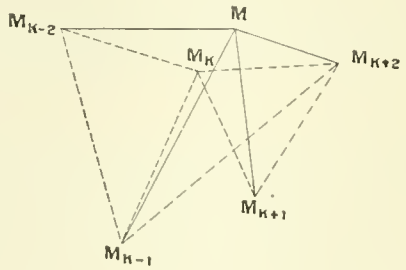
Je dis que l'un des nombres p' et p est grand d'un signe, l'un des nombres p_1, p_2 étant grand du signe opposé. En effet, l'un des deux nombres p' et p_2 étant grand et positif, supposons que ce soit p'. L'un des nombres p et p_1 est grand et négatif. Si c'est p_1, la conclusion est établie. Si c'est p, nous aurons à notre gauche un nombre grand positif p', un nombre grand négatif p. Or, à droite, nous avons un nombre grand en valeur absolue, soit p_1, soit p_2, qui sera toujours de signe opposé à p ou à p'. Le raisonnement serait tout pareil avec le départ : p_2 grand et positif.

Les différences $x - x_{k-1}$ et $x_{k+2} - x$ étant infiniment petites pour n infini, il est donc possible de déterminer des nombres h et h' positifs, tendant vers zéro et se correspondant de manière que les quotients $\mathrm{VR}(f, x-h, x)$, $\mathrm{VR}(f, x, x+h')$ soient simultanément infiniment grands en valeur absolue et de signes opposés. L'existence de nombres dérivés infinis de signes différents pour les deux côtés en tout point x est bien manifeste.

4° En tout point de l'ensemble où se présente le cas (AA'), on a évidemment le dérivé médian bilatéral zéro. Nous savons que ce dérivé ne peut pas exister en tout point d'un même côté pour une fonction variante. Nous allons obtenir qu'il existe en tout point *au moins d'un côté* pour une fonction remplissant en outre les conditions des trois premiers paragraphes (v_n infiniment grand positif).

Soit M_k un sommet principal d'ordre n, correspondant par exemple à une valeur paire de k, donc un sommet supérieur. La pente de $M_{k-1}M_k$ est positive. Si la pente de $M_{k-2}M_k$ est négative, la courbe représentative de f coupe l'horizontale de M_k entre M_{k-2} et M_{k-1}. Il y a entre x_{k-2} et x_{k-1} au moins un point ξ où $f(\xi) = f(x_k)$. De même si la pente de MM_{k+2} est positive, il existe entre x_{k+1} et x_{k+2} un point ξ' où $f(\xi') = f(x_k)$. Supposons que la pente de $M_{k-2}M_k$ soit positive, celle de M_kM_{k+2} étant négative. Nous allons chercher une condition telle que ces deux droites aient alors simultanément une pente infi-

Fig. 2.



niment petite en n, de façon que, dans tous les cas, il y aura au moins d'un côté de x_k un nombre ξ_1, tel que la variation relative de f entre x_k et ξ_1 soit infiniment petite (ou nulle) pour n infini. La condition cherchée sera évidemment remplie si la différence des pentes de M_kM_{k+2} et $M_{k-2}M_k$ est infiniment petite pour n infini. Car alors, ou bien elles sont l'une et l'autre positives et alors ξ' existe, ou bien elles sont l'une et l'autre négatives et alors ξ existe, ou bien elles sont de signes opposés, mais alors l'une et l'autre infiniment petites en valeur absolue. Nous voulons donc, posant $\frac{2}{b_n} = h$, écrire que

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h}$$

est infiniment petit, pour n infini. Dans la différence seconde figurant au numérateur, et décomposée de la manière déjà expliquée, le terme principal disparaît, le reste $r_n(x)$ nous donne une valeur maxima $4\rho_n$. Quant à la somme $S_{n-1}(x)$, elle nous fournit une quantité inférieure

au produit par h^2 de la valeur absolue maximum de la dérivée seconde de $S_{n-1}(x)$, valeur bornée par $\pi^2 V_{n-1}$, en posant

$$a_1 b_1^2 + \ldots + a_n b_n^2 = V_n.$$

Notre condition sera donc satisfaite si $V_{n-1} : b_n$ et $b_n \rho_n$ sont l'un et l'autre infiniment petits pour n infini. Observons que, par la seconde hypothèse, $\rho_n : a_n$ est infiniment petit, $a_n b_n$ étant infiniment grand quand ρ_n l'est. ρ_n possédera donc ce dernier caractère si à nos deux nouvelles conditions nous joignons celle-ci : $\overline{\lim}.\, T_{n-1} : a_n b_n < \frac{2}{3\pi}$. Supposons ces trois conditions remplies. Je dis que f présente en tout point le dérivé zéro au moins d'un côté. En effet, nous allons montrer que, x étant invariable, il est possible de déterminer, pour chaque valeur de n, un nombre x' inférieur ou supérieur à x, différant de x de moins de $\frac{2}{b_n}$ et tel que la variation relative de f entre x et x' soit nulle, ou infiniment petite avec $\frac{1}{n}$.

D'abord si x est l'un des sommets principaux x_k d'ordre n, x' peut, comme il a été expliqué, être placé soit en ξ, soit en ξ', soit en ξ_1 = indifféremment x_{k-2} ou x_{k+2}. Supposons x compris entre x_k et x_{k+1}. Sur la courbe C, M figurant $f(x)$ est sur l'arc $M_k M_{k+1}$. Nous allons voir d'abord que, la pente de $M_{k-1} M_{k+2}$ étant de signe opposé à celle de $M_k M_{k+1}$, à toute ordonnée intermédiaire à celles de M_k et de M_{k+1}, correspond forcément un point de C, soit sur l'arc $M_{k-1} M_k$, soit sur l'arc $M_{k+1} M_{k+2}$. Car, en supposant par exemple k pair, les deux segments numériques

$$f(x_{k-1}),\quad f(x_k) \qquad \text{et} \qquad f(x_{k+1}),\quad f(x_{k+2})$$

empiètent l'un sur l'autre d'après

$$f(x_{k-1}) < f(x_{k+2}), \qquad f(x_k) > f(x_{k+1})$$

et par suite ils recouvrent entièrement tout le segment $f(x_{k+1}), f(x_k)$. Un nombre λ situé entre $f(x_{k+1})$ et $f(x_k)$ est alors compris soit entre $f(x_{k-1})$ et $f(x_k)$, soit entre $f(x_{k+1})$ et $f(x_{k+2})$. Donc f prend la valeur λ soit entre x_{k-1} et x_k, soit entre x_{k+1} et x_{k+2}. Par suite, admettant toujours une valeur paire pour k (et si k était impair, la

conclusion ne serait évidemment pas infirmée), si

$$f(x_{k+1}) < f(x) < f(x_k),$$

il y a un nombre x' soit entre x_{k-1} et x_k, soit entre x_{k+1} et x_{k+2}, où $f(x') = f(x)$.

Supposons maintenant $f(x)$ étranger au segment $f(x_{k+1})$, $f(x_k)$ et par exemple supérieur au second de ces nombres. La suite du raisonnement garderait sa forme avec l'hypothèse $f(x) < f(x_{k+1})$. La pente de $M_{k-1}M$ est positive d'après

$$f(x) > f(x_k) > f(x_{k-1}) \qquad \text{et} \qquad x > x_k > x_{k-1}.$$

Au contraire la pente de MM_{k+1} est négative, d'après

$$f(x) > f(x_{k+1}) \qquad \text{et} \qquad x < x_{k+1}.$$

Si donc il n'existe de nombre x' où f prenne la valeur $f(x)$, ni entre x_{k-2} et x_{k-1}, ni entre x_{k+1} et x_{k+2}, c'est que certainement les pentes de $M_{k-2}M$ et de MM_{k+2} sont la première positive, la seconde négative. Nous allons montrer que, dans ce cas, ces deux pentes sont infiniment petites pour n infini.

Posons $x = x_k + \frac{\theta}{b_n}$ avec $0 < \theta < 1$, k étant toujours supposé pair, en sorte que le sommet M_k est supérieur. Notre hypothèse est que

$$f(x) - f(x_{k-2}) \qquad \text{et} \qquad f(x) - f(x_{k+2})$$

sont positifs. Pour évaluer ces variations de f, nous divisons comme toujours cette fonction en trois termes, S_{n-1}, le terme principal d'ordre n et r_n. Nous ne savons borner la variation de r_n qu'en valeur absolue, savoir par $2\rho_n$. La variation du terme principal se calcule explicitement. Elle vaut dans les deux cas $-2a_n \sin^2 \pi \frac{\theta}{2}$ et est donc négative. A celle de S_{n-1}, nous appliquerons les formules

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2}\delta M, \qquad \varphi(x) - \varphi(x-h) = h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2}\delta' M,$$

M étant la valeur absolue maximum de $\varphi''(x)$ entre $x-h$ et $x+h$, δ et δ' étant des nombres de carrés inférieurs à un. Pour $\varphi = S_{n-1}$,

M est au plus égal à $\pi^2 V_{n-1}$. Nous avons, avec

$$x - x_{k-2} = \frac{2+\theta}{b_n}, \qquad x_{k+2} - x = \frac{2-\theta}{b_n},$$

d'une part

$$0 < \frac{f(x) - f(x_{k-2})}{x - x_{k-2}} < \frac{4 b_n \rho_n}{2+\theta} + S'_{n-1}(x) + \frac{2+\theta}{2 b_n} \pi^2 V_{n-1}$$

et de même

$$0 < \frac{f(x) - f(x_{k+2})}{x_{k+2} - x} < \frac{4 b_n \rho_n}{2-\theta} - S'_{n-1}(x) + \frac{2-\theta}{2 b_n} \pi^2 V_{n-1}.$$

Nous voulons montrer que, dans chaque double inégalité, le membre médian, qui est positif et représente respectivement la pente de $M_{k-2}M$ et celle de $M_{k+2}M$ changée de signe, est infiniment petit. Il suffit de le montrer pour la somme des deux. Or, pour cette dernière, le fait est manifeste, $b_n \rho_n$ et $V_{n-1} : b_n$ étant infiniment petits par hypothèse.

En résumé, quel que soit x déterminé et n, nous pouvons définir un nombre x' supérieur ou inférieur à x, tendant vers x pour n infini, pendant que $VR(f, x, x')$ tend vers zéro. Donc en tout point x pour un côté au moins f possède le dérivé médian ou extrême zéro.

Cherchons des lois particulières pour les fonctions a_n et b_n, l'entier n vérifiant les conditions :

$$V_{n-1} : b_n \quad \text{et} \quad b_n \rho_n \text{ infiniment petits}, \qquad \overline{\lim}\, T_{n-1} : a_n b_n < \frac{2}{3\pi}.$$

Observons que la somme des n premières factorielles est dans un rapport infiniment voisin de un (pour n infini) avec la dernière. Car, ce rapport étant $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \ldots$, tous les termes de cette somme à partir du troisième, et ils sont $n-2$, sont l'un égal, les autres inférieurs à $\frac{1}{n(n-1)}$. Ce rapport est donc compris entre 1 et $1 + \frac{2}{n-1}$. De même, rappelons que la somme $\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots$ est inférieure à une progression géométrique de raison $\frac{1}{n+1}$ et dont le premier terme serait $\frac{1}{n!}$. Elle est donc avec son premier terme dans un rapport compris entre 1 et $1 + \frac{1}{n}$. Et si l'on considère des fonctions u_n plus

rapidement croissantes que $n!$, on aura pareillement, pour la somme de leurs n premières valeurs, un infiniment grand équivalent au dernier terme de la somme et pour la série des inverses des valeurs à partir de la $n^{\text{ième}}$, un infiniment petit équivalent au premier terme de la série. Posons donc

$$a_n = [n!]^{-n+1} \qquad \text{et} \qquad b_n = [n!]^n.$$

Nous avons

$$a_n b_n = n!, \qquad a_n b_n^2 = (n!)^{n+1},$$

T_{n-1}, V_{n-1}, ρ_n sont deux infiniment grands et un infiniment petit respectivement équivalents à $a_{n-1} b_{n-1}$ soit $(n-1)!$, $a_{n-1} b_{n-1}^2$ soit $[(n-1)!]^n$, a_{n+1} soit $[(n+1)!]^{-n}$. Donc, $T_{n-1} : a_n b_n$ équivaut à $\frac{1}{n}$, $V_{n-1} : b_n$ à n^{-n}, $b_n \rho_n$ à $(n+1)^{-n}$. Donc, nos trois conditions sont vérifiées et nous pouvons énoncer la conclusion suivante :

La fonction

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{(n!)^{n-1}} \cos \pi [n!]^n x$$

possède certainement en tout point les dérivés $+\infty$ d'un côté, $-\infty$ de l'autre, et le dérivé médian ou extrême zéro au moins d'un côté. Elle possède, sur une épaisseur pleine, à la fois les deux dérivés supérieurs $+\infty$, les deux dérivés inférieurs $-\infty$, et par suite le dérivé bilatéral médian zéro (¹).

Comme nous l'avons dit, un progrès réalisé par cette fonction sur celle de Weierstrass consiste en ce que, l'impossibilité pour cette dernière de posséder en certains points une dérivée unilatérale infinie

---

(¹) α étant un nombre supérieur à $1 + 3\frac{\pi}{2}$, en posant $a_n = \alpha^{-n(n-1)}$, $b_n = \alpha^{n^2}$, d'où pour T_{n-1}, V_{n-1}, ρ_n, les équivalences à $\alpha^n : (\alpha - 1)$, α^{n^2-n}, α^{-n^2-n}, on obtiendrait la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\alpha^{n^2-n}} \cos \pi \alpha^{n^2} x$, donnant également lieu à l'énoncé ci-dessus. Il en serait plus généralement de même avec la série $\sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{\beta_n} \cos \pi \beta_n x$, sous la seule condition que le rapport $\beta_{n+1} : \alpha^n \beta_n$ croisse indéfiniment.

de chaque côté n'est pas établie, tandis qu'elle est bien manifeste pour la première. Enfin, plus précisément, la possibilité pour une fonction d'admettre en tout point, au moins pour un côté, le dérivé zéro a probablement une assez grande importance dans la théorie des nombres dérivés.

NOTES.

1. — Sur les systèmes stricts d'intervalles.

Nous avons eu à étudier à plusieurs reprises la manière dont certaines familles d'intervalles recouvrent l'ensemble des points qui leur sont intérieurs. Examinons cette question dans toute sa généralité.

Nous ferons d'abord une remarque essentielle : Étant donnés trois intervalles i_1, i_2, i_3, s'il existe un même point A intérieur aux trois, l'un au moins de ces intervalles est tel que tout point intérieur à lui est intérieur à l'un des deux autres.

En effet, soient $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\alpha_3\beta_3$ les trois intervalles, la première extrémité désignée étant pour chacun d'eux celle de gauche. L'un des trois points α_1, α_2, α_3 n'est à droite d'aucun des deux autres. Supposons que ce soit α_1, α_2 et α_3 peuvent séparément ou simultanément coïncider avec α_1 ou être à sa droite, mais ne sont ni l'un ni l'autre à gauche de α_1. Si β_1 n'est à gauche d'aucun des points β_2, β_3, tout point intérieur à i_2 ou à i_3 est compris entre α_1 et β_1, donc est intérieur à i_1. La proposition est alors établie. Si au contraire l'un des points β_2 et β_3 est à droite de β_1, je peux toujours supposer, en échangeant s'il le faut les indices de i_2 et de i_3, que β_2 n'est pas à gauche de β_3. Alors tout point compris entre α_1 et β_2, s'il est à gauche de A, est intérieur à i_1, s'il est à droite de A, est intérieur à i_2, s'il est en A, est intérieur aux deux, par hypothèse. Or, tout point intérieur à i_3, donc compris entre α_3 et β_3, est à droite de α_1 et à gauche de β_2. Il est donc soit dans i_1, soit dans i_2. C. Q. F. D.

Si donc on appelle *champ* (ou *région*) *couvert* par des intervalles, l'ensemble des points intérieurs à au moins l'un d'eux, le champ couvert par trois de ces intervalles, auxquels un certain point est simultanément intérieur, peut être couvert avec deux seulement de

ces intervalles. Nous dirons encore qu'*un point* est *couvert* par un intervalle s'il lui est intérieur. Si donc, parmi divers intervalles en nombre fini couvrant l'intérieur d'un certain segment, chacun possède en propre au moins un point intérieur qu'il est seul à couvrir, il n'y a pas de points intérieurs simultanément à trois ni à plus de trois de ces intervalles. Car, s'il existait un tel point intérieur à p intervalles, on pourrait supprimer $p-2$ de ces intervalles sans retrancher un seul point recouvert. Il suffirait de conserver seulement, parmi les p intervalles, les deux qui ont l'un l'extrémité la plus (ou l'une des plus) à gauche, l'autre l'extrémité (ou l'une des plus) à droite.

Nous dirons qu'un système d'intervalles en nombre fini ou infini est *strict*, si pour chaque intervalle du système il existe au moins un point qu'il est seul à couvrir, donc qui est intérieur à lui et à lui seul. La suppression d'un intervalle dans un système strict diminue le champ couvert. D'ailleurs, si une famille d'intervalles possède la propriété qu'aucun point ne soit simultanément intérieur à plus de deux d'entre eux, il ne s'ensuit pas que chaque intervalle possède en propre des points intérieurs. Il suffit, pour s'en convaincre, de prendre pour les trois intervalles i_1, i_2, i_3 la succession d'extrémités $\alpha_1\,\alpha_2\,\beta_1\,\alpha_3\,\beta_3\,\beta_2$. Aucun point n'est simultanément intérieur à ces trois intervalles, et cependant $\alpha_3\,\beta_3$ n'a en propre aucun point intérieur, puisque $\alpha_3\,\beta_3$ est intérieur à $\alpha_2\,\beta_2$.

En tout cas, *si un système d'un nombre limité d'intervalles est strict*, tout point du champ couvert étant intérieur à deux d'entre eux au plus, *la longueur de ce champ*, qui est l'intérieur d'un ou plusieurs segments, *est au moins égale à la demi-somme des longueurs des intervalles*. Ce théorème peut trouver son application dans l'étude d'une famille d'intervalles à laquelle chaque point d'un segment continu donné ou d'un ensemble fermé est intérieur. Il est possible alors, comme on sait, de comprendre tous les points du segment ou de l'ensemble à l'intérieur d'un nombre fini d'intervalles pris dans la famille. Un premier choix de tels intervalles étant effectué, il sera intéressant d'en opérer la réduction, si la présence de certains d'entre eux est superflue pour recouvrir le même domaine. [J'ai donné un exemple d'une telle réduction en formant le système strict le plus simple d'intervalles canoniques (théorie des fractions continues) relatifs à des

fractions rationnelles de dénominateur au moins égal à l'entier A. Voir *Bull. Soc. math.*, t. XXXIX, 1911.]

Nous dirons que deux familles d'intervalles sont *équivalentes*, du point de vue qui nous occupe, si elles couvrent exactement le même champ. Alors, tout point intérieur à un intervalle de l'une des familles est intérieur à un intervalle de l'autre. Demandons-nous maintenant si, étant donnée une famille d'intervalles composée d'une infinité d'éléments, il est possible de former avec des intervalles pris dans cette famille un système strict équivalent à elle. En toute généralité, il n'en sera pas ainsi. Les intervalles de longueur 1 dont les extrémités gauches ont une abscisse positive et inférieure à 1, recouvrent tout l'intérieur du segment $0 - 2$. Quels que soient α et β entre 0 et 2, il est possible de couvrir tout le segment $\alpha\beta$ avec deux intervalles de la famille. Mais, ni $0 - 1$, ni $1 - 2$ n'étant dans la famille, il faut utiliser une infinité de ces intervalles, par exemple ceux d'origine $\frac{1}{n}$ et $1 - \frac{1}{n}$ (n entier) pour couvrir l'intégralité de l'intervalle $0 - 2$. Nous allons donner une classe de familles d'intervalles en infinité, possédant la propriété, établie pour les familles finies, de pouvoir être réduites de manière que, d'une part, chaque intervalle retenu couvre en propre au moins un point intérieur à lui, le champ total couvert n'étant pas d'autre part restreint par cette sorte d'émondage d'éléments superflus. Nous exprimerons ceci en disant qu'il existe un système strict d'intervalles appartenant à la famille donnée et équivalent à elle. L'épithète de *strict* exprime l'impossibilité de supprimer un seul intervalle du système sans découvrir certains points et celle d'*équivalent* signifie que l'espace couvert est le même pour le système particulier et pour la famille totale.

Nous dirons qu'une famille d'intervalles φ est *semi-fermée supérieurement* si, $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ étant une suite quelconque d'intervalles φ possédant un intervalle limite i, il existe un intervalle contenant i (et pouvant coïncider avec lui) et appartenant à la famille considérée. Si, plus particulièrement, i faisait toujours partie de la famille φ, celle-ci serait *fermée*. Nous allons montrer que toute famille de cette sorte est équivalente à un système strict d'intervalles choisis parmi elle.

Considérons l'ensemble des points P intérieurs à au moins un intervalle φ. Le complémentaire E de cet ensemble est fermé. Tout point intérieur à un intervalle u ou ab contigu à E est intérieur à au moins un intervalle φ. Ni a ni b ne sont intérieurs à un de ces derniers, mais a peut être extrémité gauche d'un ou de plusieurs d'entre eux, et pareillement b peut être extrémité droite d'un ou de plusieurs φ. Supposons d'abord réalisée la première hypothèse. D'après la semi-clôture de la famille φ, si a_1 est la borne à droite des intervalles $\varphi(a)$ ayant pour extrémité gauche a (et nous supposons qu'il en existe), aa_1 est un intervalle φ et d'ailleurs le plus grand des intervalles $\varphi(a)$. Si au contraire aucun intervalle φ n'admet a pour extrémité gauche, je dis que, le point P tendant vers a intérieurement à u, *les intervalles* φ *contenant* P *tendent vers zéro*. S'il en était autrement, en effet, si leur longueur admettait pour plus grande limite un nombre positif α, quand P tend vers a, l'extrémité gauche de ces intervalles étant entre a et P, d'après la semi-clôture supérieure de la famille donnée, l'intervalle d'extrémité gauche a et de longueur α serait un intervalle φ ou compris dans un intervalle φ. Tout pareillement, ou bien il existe un intervalle φ d'extrémité droite b, soit b_1b, tel que tout intervalle φ ayant pour extrémité droite b est compris dans b_1b; ou bien la longueur des intervalles φ tend vers zéro quand un de leurs points tend vers b. Je dis qu'il est toujours possible de déterminer dans φ une famille partielle φ_1 équivalente à φ (recouvrant tout l'intérieur de ab) et telle que sur tout intervalle SS′ d'extrémités comprises entre a et b, il n'empiète qu'un nombre limité d'intervalles φ_1. Nous distinguons trois cas :

1° Il existe au moins un intervalle $\varphi(a)$ et au moins un intervalle $\varphi(b)$ admettant respectivement pour extrémités a et b. Soient aa_1 et b_1b ces intervalles, choisis l'un et l'autre les plus grands répondant à ces conditions. a_1 et b_1 étant intérieurs à u, le segment a_1b_1 peut être couvert avec un nombre fini d'intervalles φ. En leur ajoutant aa_1 et b_1b, on obtient un système constitué par un nombre limité d'éléments choisis parmi les φ, couvrant l'intérieur de ab, donc présentant les caractères du système φ_1. La réduction sur u des φ_1 à un système strict ψ est alors aisée.

2° L'une des sortes d'intervalles $\varphi(a)$ ou $\varphi(b)$ et une seule manque. Supposons que ce soit la seconde. On introduit d'abord l'intervalle aa_1 et, entre a_1 et b, on opère comme dans le troisième cas, en plaçant en a_1 le point P_0 considéré ci-dessous.

3° Aucun intervalle φ n'a pour extrémité a ni b. Soit P_0 un point compris entre a et b. J'établis sur u une suite (qui n'existerait pas dans le cas où P_0 est en a_1) de points $P_{-1}, P_{-2}, \ldots, P_{-n}, \ldots$, chacun à gauche du précédent et tendant vers a, et une suite $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, tendant vers b, en progressant toujours vers la droite, suite à ne pas envisager davantage dans le second cas s'il existe un intervalle $\varphi(b)$, sans aucun $\varphi(a)$, auquel cas P_0 est placé en b_1. Tout point de P_iP_{i+1}, que i soit positif ou négatif, est intérieur à au moins un intervalle φ. Nous pouvons donc couvrir à la fois tous les points de ce segment, extrémités comprises, avec un nombre limité de φ. Nous appelons ces intervalles retenus pour couvrir P_iP_{i+1}, les intervalles $\varphi(i)$. La réunion de tous les $\varphi(i)$ constituera le système φ_1. Je dis que ce dernier ne contient qu'un nombre limité d'éléments recouvrant un intervalle SS′, entièrement intérieur à u. En effet, désignons par $\varphi_1(SS')$ les intervalles φ_1 contenant au moins un point de SS′. S'il existe une infinité d'intervalles $\varphi_1(SS')$, ces intervalles appartiennent certainement à des groupements $\varphi(i)$ à indices indéfiniment croissants en valeur absolue, puisque chaque groupe $\varphi(i)$ ne contient qu'un nombre limité d'éléments. Est-il possible qu'il y ait parmi les $\varphi_1(SS')$ des intervalles $\varphi(i)$ à indices positifs indéfiniment croissants? Non, car, si i croît indéfiniment par valeurs positives, c'est qu'il n'existe pas de segment $\varphi(b)$. Mais alors, comme nous l'avons montré, les segments $\varphi(i)$, dont un point au moins (situé entre P_i et P_{i+1}) tend vers b, tendent, en longueur, vers zéro. Il est donc impossible qu'une infinité d'entre eux contiennent des points de SS′ si S′ est inférieur à b. De même il est impossible que les $\varphi_1(SS')$ contiennent des intervalles $\varphi(i)$ à indices négatifs non bornés inférieurement. Donc, les intervalles $\varphi_1(SS')$ sont constitués avec des intervalles $\varphi(i)$ à indices i bornés en valeur absolue. Ils sont donc en nombre fini.

Montrons maintenant la possibilité de réduire les φ_1 à un système strict équivalent $\psi(u)$. La preuve en est faite quand les φ_1 sont en

nombre fini. Supposons-les donc en infinité (évidemment dénombrable) et ainsi ordonnés : $\varphi_1^{(1)}, \varphi_1^{(2)}, \ldots, \varphi_1^{(n)}, \ldots$ Désignons par ψ_1 le premier intervalle de la suite $\varphi_1^{(n)}$ possédant à son intérieur un point qui n'est intérieur à aucun des intervalles suivants $\varphi_1^{(n+p)}$. ψ_1 existe. Car, soit M un point quelconque entre a et b, M est intérieur à un nombre limité d'intervalles $\varphi_1^{(n)}$. Soit N le plus grand de leurs indices. Il est évident que ψ_1 occupe dans la suite $\varphi_1^{(n)}$ un rang au plus égal à N. Ayant obtenu ψ_1, nous déterminerons ψ_2 par la règle suivante qui nous donne ψ_{p+1} ayant $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$. ψ_p occupe dans la suite $\varphi_1^{(n)}$ un certain rang m. ψ_{p+1} est dans la suite $\varphi_1^{(m+1)}, \varphi_1^{(m+2)}, \ldots$, le premier intervalle $\varphi_1^{(m+k)}$ possédant à son intérieur un point qui n'est intérieur ni à l'un des intervalles $\varphi_1^{(m+k+h)}$ suivants, ni à $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$. ψ_{p+1} existe toujours. En effet, $\psi_1, \ldots, \psi_p$ ne recouvrent pas à eux seuls ab, puisque, par hypothèse, a et b ne sont pas simultanément extrémités d'intervalles φ. Donc il y a au moins un point M qui n'est intérieur à aucun des $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$. D'ailleurs, si N est le plus grand indice des intervalles $\varphi_1^{(n)}$ contenant M (intervalles qui sont en nombre fini), N ne peut pas être inférieur à m. Car, d'abord $\varphi_1^{(N)}$ ne coïncide avec aucun des $\psi_1, \ldots, \psi_p$, puisque M n'est intérieur à aucun de ces intervalles. Donc, N serait compris entre les rangs de ψ_{h-1} et de ψ_h ($h \leq p$) dans la suite $\varphi_1^{(n)}$. Mais, puisque M intérieur à $\varphi_1^{(N)}$ n'est intérieur à aucun des $\psi_1, \ldots, \psi_{h-1}$, ni à $\varphi_1^{(N+k)}$, quel que soit k, il est impossible que le rang de ψ_h dans la suite $\varphi_1^{(n)}$ soit supérieur à N. Donc, $N > m$ et ψ_{p+1} occupe certainement dans la suite des $\varphi_1^{(n)}$ un rang au plus égal à N. D'après notre construction, ψ_{p+1} qui existe et est bien défini quel que soit p, possède en propre un certain point intérieur M_{p+1} n'appartenant ni à $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$ d'après la première condition imposée à ψ_{p+1}, ni à ψ_{p+k}, puisque tout intervalle ψ_{p+k} est un intervalle $\varphi_1^{(q+h)}$ (si ψ_{p+1} coïncide avec $\varphi_1^{(q)}$), dont aucun point intérieur ne coïncide avec M_{p+1} d'après la seconde condition exigée de ψ_{p+1}. Le système ψ_p est donc strict. Je dis qu'il recouvre tout l'intérieur de ab. S'il en était autrement, on examinerait un point M non couvert. Ce point étant couvert par certains $\varphi_1^{(n)}$, en nombre fini comme nous l'avons montré, d'indices supérieurs $N_1, N_2, \ldots, N_{h-1}, N$, si aucun des $h-1$ premiers parmi ces φ_1 n'est un ψ, $\varphi_1^{(N)}$ en est certainement un. Car M lui est intérieur et ne l'est ni aux ψ déjà établis quand on arrive à l'examen

de $\varphi_1^{(N)}$ ni aux $\varphi_1^{(N+k)}$. Donc, le système ψ_p est strict et équivalent à la famille φ sur ab.

En opérant de même sur chaque contigu de E, on remplace la famille φ par un système strict extrait de cette famille et équivalent à elle.

La propriété essentielle et déjà énoncée des *systèmes stricts*, est que *la somme des longueurs des intervalles les constituant est inférieure à deux fois la longueur du champ recouvert par eux.* (Elle est évidemment supérieure à cette dernière.)

Il est intéressant d'étudier *a priori* la nature d'un système strict σ formé d'intervalles recouvrant tous les points d'un intervalle fini i mais non pas ses extrémités.

A chaque élément ψ du système σ, correspond par hypothèse au moins un point, soit $x(\psi)$, intérieur à ψ et à nul autre intervalle de la famille. ψ ne contient évidemment aucun point $x(\psi')$ propre à un autre intervalle ψ'. Les points $x(\psi)$ sont donc isolés, donc ils sont en nombre fini ou en infinité dénombrable. Il en est donc ainsi des ψ. Soient $\psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots$ les éléments de σ; $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ leurs points intérieurs propres. Les x_n n'ont pas de point limite intérieur à i. Car un tel point ξ est intérieur à un intervalle $\psi(\xi)$ auquel une infinité de x_n serait intérieurs, ce qui est absurde. Les x_n, s'ils ne sont pas en nombre fini, ne sauraient donc avoir d'autres points limites que a et b extrémités gauche et droite de i. Nous pouvons les supposer affectés d'un indice entier positif ou négatif exprimant leur rang géométrique, le rang zéro étant attribué indifféremment à l'un des $x(\psi)$, en supposant immédiatement une infinité d'indices pour chaque signe. Alors, entre x_p et x_{p+1} il n'y a aucun point $x(\psi)$. ψ_n ne contenant ni x_{n-1} ni x_{n+1}, aucun point de l'intervalle $x_p x_{p+1}$ n'est intérieur à un intervalle ψ'_n distinct de ψ_p et de ψ_{p+1}. Les segments $x_p x_{p+1}$ constituant ensemble tout l'intervalle i, il est évident qu'un point quelconque de i est intérieur à deux intervalles ψ au plus. Observons de plus que ψ_n étant compris entre x_{n-1} et x_{n+1}, a une longueur infiniment petite, quand n croît indéfiniment par valeurs positives ou par valeurs négatives. Si donc le système σ est strict et infini, il n'y a pas d'élément de ce système infiniment voisin de a ni de b, et dont la longueur ne soit pas infiniment petite. Enfin, chaque intervalle ψ_n étant sectionné

par le point x_n correspondant en deux intervalles ψ'_n, ψ''_n l'un à gauche, l'autre à droite, nous avons

$$\psi'_{n+1} \quad \text{et} \quad \psi''_n \leqq x_{n+1} - x_n < \psi''_n + \psi'_{n+1}$$

et par suite

$$x_{n+1} - x_n < \psi''_n + \psi'_{n+1} \leqq 2(x_{n+1} - x_n),$$

donc

$$i < \Sigma \psi_n \leqq 2i,$$

l'égalité correspondant au cas où ψ_n coïncide avec l'intervalle

$$x_{n-1} x_{n+1}.$$

L'analyse précédente conduit donc aux résultats suivants particulièrement nets :

1° *Un système strict et borné d'intervalles n'admet pas d'élément limite*, ou encore, *ne contient qu'un nombre fini d'éléments de longueur supérieure à un même nombre positif.*

2° *Un système fermé d'intervalles est équivalent à un système dépourvu d'éléments limites.*

En effet, dans un système strict, il est impossible que les extrémités a_n et b_n d'une suite d'intervalles $a_n b_n$ appartenant à la famille tendent simultanément vers deux limites finies α et β distinctes. Sinon, quel que soit γ intérieur à $\alpha\beta$, à partir d'une certaine valeur de n, a_n est inférieur à γ et b_n surpasse γ. Donc, γ est intérieur à $a_n b_n$. Donc, l'intervalle $\alpha\beta$ et tous les $a_n b_n$ dès qu'ils empiètent sur $\alpha\beta$ appartiennent à un même champ couvert i, auquel les raisonnements ci-dessus s'appliquent.

Enfin, supposons que l'intérieur d'un segment i soit couvert par une famille d'intervalles φ sur chacun desquels l'épaisseur d'un ensemble E est au moins $1 : A$. Si A est très voisin de 1, la conclusion que l'épaisseur de E sur i surpasse $1 : 2A$ est insuffisamment précise. Nous avons montré quelques lignes plus haut que, si l'on ajoute à une famille d'intervalles non fermée tous ses intervalles limites, on n'étend nullement le champ couvert par la famille. Or, sur tout intervalle limite d'une suite de φ, l'épaisseur de E est au moins $1 : A$ comme sur les φ eux-mêmes. Soit donc φ_0 la famille φ accrue de ses éléments

limites. Les φ_0 formant une collection fermée, il est possible de couvrir i avec un système strict d'intervalles ψ_n choisis parmi les φ_0, et affectés, pour indiquer leur rang, d'un indice entier positif, négatif ou nul, ce dernier attribué indifféremment. La famille d'intervalles ψ_n sectionne i en un nombre fini ou une infinité (bornons-nous à ce cas) d'intervalles alternativement agrégés à un seul ou à deux ψ_n. Soient h_n la partie commune à ψ_n et à ψ_{n+1} et k_n la partie propre à ψ_n. On a

$$\psi_n = h_{n-1} + k_n + h_n.$$

Soient respectivement e_n, λ_n, η_n les mesures de E sur ψ_n, h_n, k_n. Posons

$$\Sigma h_n = h, \qquad \Sigma k_n = k, \qquad \Sigma \lambda_n = \lambda, \qquad \Sigma \eta_n = \eta.$$

On a

$$e_n = \lambda_{n-1} + \eta_n + \lambda_n$$

et par hypothèse

$$\mathrm{A} e_n \leqq \psi_n.$$

La mesure totale de E sur i est $\lambda + \eta$. La longueur de i est $h + k$. De plus,

$$\Sigma e_n = 2\lambda + \eta, \qquad \Sigma \psi_n = 2h + k.$$

Donc,

$$\mathrm{A}(2\lambda + \eta) \leqq 2h + k.$$

Nous voulons chercher, connaissant l'existence de cette dernière relation, le minimum de l'épaisseur de E sur i, soit de $\frac{\lambda + \eta}{h + k} = \varpi$. On a déjà, d'après $h + k \leqq \mathrm{A}(2\lambda + \eta) - h$

$$\varpi = \frac{\lambda + \eta}{\mathrm{A}(2\lambda + \eta) - h}.$$

La fraction du second membre, dont le produit par $2\mathrm{A}$ s'écrit

$$1 + \frac{\mathrm{A}\eta + h}{\mathrm{A}(2\lambda + \eta) - h},$$

est décroissante en λ. Or, d'après $\lambda_n \leqq h_n$, λ est inférieur à h. Donc

$$\varpi \geqq \frac{h + \eta}{(2\mathrm{A} - 1)h + \eta}.$$

A et par suite $2A - 1$ surpassant un, le minimum du second membre est $\frac{1}{2A-1}$. On a donc

$$\varpi > \frac{1}{2A-1}.$$

Cette limite peut d'ailleurs être atteinte. Le raisonnement précédent montre la nécessité pour cela de réaliser les conditions $\lambda = h$, $\eta = 0$. Soit une suite quelconque de points x_n à indices entiers positifs ou négatifs tendant en décroissant vers α pour $n = -\infty$ et en croissant vers β pour $n = +\infty$. Divisons l'intervalle $x_n x_{n+1}$ en trois, séparés par les deux points x'_{n+1}, x''_n et proportionnels aux nombres $A - 1$, 1, $A - 1$. Le segment $x'_{n+1}\, x''_n$ est aux segments $x_n x''_n$ et $x'_{n+1} x_{n+1}$ dans le rapport de 1 à A. Prenons pour ψ_n l'intervalle $x'_n x''_n$ et pour E l'ensemble de tous les segments $x'_{n+1} x''_n$. L'épaisseur de E sur ψ_n est bien $\frac{1}{A}$ et d'autre part l'épaisseur de E sur $x_n x_{n+1}$ étant $\frac{1}{2A-1}$, ce dernier nombre est aussi l'épaisseur de E sur i. En résumé, *si l'épaisseur de* E *sur chaque intervalle* φ *est au moins* $\frac{1}{1+\varepsilon}$, *l'épaisseur de* E *sur le champ couvert par les* φ *est au moins* $\frac{1}{1+2\varepsilon}$, valeur évidemment bien plus importante à connaître, si ε est un nombre petit, que la limite $\frac{1}{2A} = \frac{1}{2+2\varepsilon}$.

2. — Sur une propriété des résiduels.

Nous avons admis (**55**) ce théorème d'ailleurs connu : *Tout résiduel d'un ensemble parfait contient lui-même un ensemble parfait.* Démontrons-le.

Si R est un résiduel de l'ensemble parfait P, l'ensemble E complémentaire de R relativement à P est, par définition, la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, agrégés à P et non denses sur P. Supposons d'abord pour plus de simplicité que P soit le continu. D'abord si je désigne par E_n^0 l'ensemble E_n augmenté de ses points limites étrangers à lui, c'est-à-dire la réunion de E_n et de son dérivé, l'ensemble E_n^0 est non dense, et par suite le groupement des E_n^0

est sur P un ensemble gerbé F contenant E. Donc, Q complémentaire de F est un résiduel entièrement agrégé à R. C'est sur Q que je vais déterminer un ensemble parfait.

Soient a et b deux points de Q, donc étrangers à chaque E_n et non limites pour lui. Les points de l'ensemble fermé E_1^0 situés entre a et b sont localisés sur un segment $\alpha_1\beta_1$ complètement intérieur à ab puisque a et b sont étrangers à E_1^0. Sur $a\alpha_1$ prenons un point a_1 de G, sur $\beta_1 b$ un point b_1 de G. a_1 ni b_1 ne seront agrégés à aucun des ensembles fermés E_n^0, et, sur les segments aa_1 ni bb_1, E_1^0 ni *a fortiori* E_1 n'ont aucun point. Sur aa_1 dont les extrémités sont étrangères à l'ensemble fermé E_2^0, je localise tous les points de cet ensemble compris entre a et a_1, sur le segment $\alpha_2\beta_2$ formé par leurs points extrêmes. Sur $a\alpha_2$ et sur $\beta_2 a_1$, je choisis deux points a_2 et b_2 de Q. Sur aa_2, sur $b_2 a_1$, dont les quatre extrémités sont étrangères à tous les E_n^0, ni E_1^0 ni E_2^0 n'ont de points, ni *a fortiori* E_1 ni E_2. On détermine de même entre b_1 et b deux points $a_3 b_3$, agrégés à Q, donc étrangers à tous les E_n^0 et tels que sur $b_1 b_3$ ni sur $b_3 b$, E_2^0 n'ait de point, pas plus que E_1^0, résultat déjà acquis. On continue de proche en proche. De chacun des quatre segments obtenus dont les huit extrémités sont étrangères à tous les E_n^0, je détache un intervalle renfermant à son intérieur la totalité des points de E_3^0 situés sur le segment d'où je l'extrais et ayant ses extrémités dans Q. Sur chacun des huit segments restants, dont les extrémités sont étrangères à tous les E_n^0, ni E_1^0 ni E_2^0 ni E_3^0 n'ont de points. Et ainsi de suite. L'opération décrite ainsi est la construction type d'un ensemble parfait constitué par les points jamais intérieurs aux intervalles successivement enlevés, lesquels sont deux à deux sans points communs. L'ensemble parfait restant n'est agrégé à aucun des ensembles E_n ni même E_n^0. Donc il appartient à R.

La construction ne donne nécessairement un ensemble discontinu que si chacun des segments conservés à l'opération de rang n et ne renfermant aucun point de $E_1^0, E_2^0, \ldots, E_n^0$, contient au moins un point d'un ensemble E_{n+p}. Ceci aura toujours lieu si l'ensemble E est partout dense sur le continu. Si E n'était pas dense, il y aurait un segment dont aucun point n'appartiendrait à E. Donc, l'existence d'un ensemble parfait agrégé au continu et étranger à E serait évidente. Ce cas serait dénué d'intérêt.

Si P est un ensemble parfait, contenant un segment continu s, E est gerbé sur s et nous pouvons déterminer sur s, donc sur P, un ensemble parfait étranger à E. Supposons donc P non dense sur le continu. La démonstration précédente ne subit pas de grandes modifications. Nous considérons encore l'ensemble E_n^0 réunissant E_n, ses points limites et en plus les extrémités t_n, t'_n du $n^{\text{ième}}$ des contigus u_n de P, numérotés de 1 à l'infini.

Les E_n^0 sont tous non denses sur P. Soit F leur réunion. Le complémentaire de F, relativement à P, soit Q, est partout dense sur P. De plus, chacun de ses points étant de seconde espèce est limite de points de P des deux côtés. Je choisis a et b sur P agrégés à Q. a et b n'appartiennent à aucun des E_n et ne sont points limites pour aucun d'entre eux. D'ailleurs, a et b étant de seconde espèce, il y a dans ab des points de P tendant vers les extrémités de cet intervalle. Soient donc α_1 et β_1 les plus proches respectivement de a et de b parmi les points de E_1^0 qui sont entre a et b. α_1 et β_1 sont dans P comme E_1. Sur les segments $a\alpha_1$, $\beta_1 b$ il n'y a de points ni agrégés à E_1, ni extrémités de u_1. Il n'y a donc aucun point intérieur à u_1 sur aucun de ces segments dont les extrémités sont toutes quatre sur P.

Entre a et α_1 il y a des points de P tout comme entre β_1 et b. Je peux donc, Q étant partout dense sur P, prendre un point a_1 et un point b_1 de Q respectivement entre a et α_1, β_1 et b. E_1^0, ni par suite E_1, ni u_1 n'ont aucun point entre a et a_1 ni entre b et b_1, et d'ailleurs les quatre extrémités de ces deux segments sont étrangères à tous les ensembles E_n^0. a_1 et b_1 étant des points de seconde espèce dans P, il y a des points de P tendant vers a_1 et b_1, respectivement à l'intérieur de aa_1 et de $b_1 b$. Ces quatre points étant étrangers à E_2^0, les points de ce dernier ensemble situés entre a et a_1 d'une part, entre b_1 et b d'autre part, ont pour positions extrêmes respectives α_2 β_2 pour le premier intervalle, $\alpha_3 \beta_3$ pour le second. Entre a et α_2, β_2 et a_1, b_1 et α_3, β_3 et b, je peux, ces quatre intervalles contenant chacun une infinité de points de P sur lequel Q est partout dense, choisir respectivement quatre points de Q, a_2, b_2, a_3, b_3 et alors j'ai quatre intervalles aa_2, $b_2 a_1$, $b_1 a_3$, $b_3 b$ dont les extrémités sont agrégées à Q, donc qui contiennent chacun à leur intérieur une infinité de points de P, admettant les extrémités de ces intervalles pour points limites. Aucune de ces extré-

mités n'appartient à un ensemble E_n^0 et aucun des deux ensembles E_1, E_2, ni E_1^0, E_2^0, ni u_1, ni u_2 n'ont de points sur l'un de ces quatre segments. La construction effectuée est en somme identique à celle du premier cas avec cette particularité que les extrémités des intervalles exclus à chaque opération appartiennent à P et même sont des points de seconde espèce de P. A cela près, ces extrémités sont étrangères à tous les E_n^0 comme dans le cas de la base continue. Mais il est à remarquer que les segments conservés à la $n^{\text{ième}}$ génération ne contiennent aucun point des segments $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Les points jamais exclus forment un ensemble parfait H étranger aux E_n et d'ailleurs qui est forcément agrégé à P (donc à R), tous les intervalles contigus à P figurant parmi les points exclus. Il est même visible que, d'après notre construction, tout intervalle $a_i b_i$, contigu à H, contient des points de P, parce que les extrémités a_i, b_i sont points de deuxième espèce de P, donc limites de points de P situés à l'intérieur de ces mêmes intervalles. Les intervalles $a_i b_i$ étant partout denses sur le continu, dans tout intervalle contenant un point de H, il y aura des portions de P où H n'aura aucun point. H est non dense sur P.

3. — Une propriété générale des ensembles.

Nous allons démontrer le théorème suivant, généralisant une proposition bien connue sur les ensembles fermés : *Tout ensemble se décompose en un ensemble dense en lui-même et un ensemble dénombrable, ce dernier étant de plus non dense sur tout ensemble parfait.*

Supposons linéaire l'ensemble donné E. S'il était spatial, la démonstration suivante n'aurait à subir d'autres modifications que le remplacement du mot « intervalle » par ceux de « cercle » ou « sphère ».

Nous dirons qu'*au point* M, E *est dense en lui-même*, s'il existe dans tout intervalle contenant M un ensemble parfait sur lequel E est partout dense. Nous désignons sous le nom de points α ces points agrégés ou non à E et où cet ensemble est dense en lui-même. Remarquons immédiatement que, s'il existe un ensemble parfait ϖ où E est partout dense, tous les points de ϖ sont des points α. Il suit de là qu'aucun point α n'est isolé. D'ailleurs, les α forment évidemment un ensemble fermé. Donc l'ensemble des α est un ensemble parfait P. Je dis que E est partout dense sur P et que les points de E non agrégés

à P forment un ensemble non dense sur tout ensemble parfait et par suite dénombrable. En effet, soit un ensemble parfait Q, situé dans un intervalle contigu à P. Je dis que E est non dense sur Q. Si en effet, E était partout dense sur une portion ω de Q, tous les points de ω seraient des points α. ω serait agrégé à P et ne serait donc pas situé dans un contigu de P. Donc, sur tout ensemble parfait situé dans un contigu de P, E est non dense. Je dis que E est partout dense sur P. S'il en était autrement, il existerait une portion ϖ de P où E n'aurait aucun point. Or, soit α un point de ϖ compris entre les points extrêmes β et γ de ϖ. α est centre d'un intervalle intérieur au segment $\beta\gamma$ et sur lequel existe un ensemble parfait R où E est partout dense. Nous avons vu que tous les points de R sont agrégés à P et par suite appartiennent à ϖ puisque R est entre α et β. Mais E n'a pas de points sur ϖ. Donc, E ne peut pas être dense sur R. Nous aboutissons à une contradiction. Donc, E est partout dense sur P. Soient E′ l'ensemble des points communs à P et à E, E″ l'ensemble des points communs à P et à E, E″ l'ensemble des autres points de E. Je dis que E″ est non dense sur tout ensemble parfait. En effet, si E″ est dense sur un ensemble parfait, il est partout dense sur une portion R de cet ensemble. Or, si R a des points étrangers à P, nous avons vu que E et *a fortiori* E″ ne sont point partout denses sur R. Si R est agrégé à P, E″ n'a aucun point sur R, puisque tous les points de E″ sont étrangers à P. Donc, E″ n'est partout dense sur aucun ensemble parfait; il est non dense sur tous. J'en conclus que E″ est dénombrable. En effet, les points au voisinage desquels un ensemble donné est non dénombrable, forment un ensemble parfait et sur ce dernier l'ensemble initial est partout dense [1].

La décomposition est remarquablement simple pour les ensembles fermés. L'ensemble E′ dense en lui-même est le noyau parfait de E. L'ensemble complémentaire réductible dans chaque intervalle contigu à E′ est non dense sur tout ensemble parfait. La démonstration précé-

---

[1] Soit Q l'ensemble des points au voisinage desquels E est non dénombrable. Je dis que Q est parfait (Lindelöf et Lebesgue) et que E est dense sur Q. Q existe dans tout intervalle où E n'est pas dénombrable. Q est fermé. Dans tout intervalle contigu à Q, E est dénombrable. Donc, Q n'a pas de points isolés,

dente ne fait aucun appel à la notion de nombre transfini, pas plus que la démonstration de MM. Lindelöf et Lebesgue sur la décomposition des ensembles fermés. Néanmoins, pour se rendre compte de la constitution des ensembles du point de vue qui nous occupe, comme, dans une autre théorie, pour saisir les propriétés des ensembles fermés à l'égard de la notion de point limite et l'échelonnement de leurs dérivés, il paraît indispensable d'utiliser l'idée d'ordonnance transfinie. Voici donc comment peut s'effectuer la recherche de l'ensemble E' dense en lui-même dont le complémentaire E'' relativement à E est non dense sur tout ensemble parfait *et nul sur le dérivé de* E'. Le lecteur se rendra compte en même temps comment un ensemble peut, sans être réductible, être non dense sur tout ensemble parfait.

Remarquons d'abord que, si un ensemble E est dense sur un ensemble parfait Q, le dérivé de E contient une portion de Q, donc n'est pas dénombrable. Ceci étant observé, soit P_1 le noyau du dérivé de E. Dans chaque intervalle u_1 contigu à P_1, E est réductible, donc, son dérivé y étant dénombrable, E est dans u_1 non dense sur tout ensemble parfait. Donc un ensemble dense en lui-même et agrégé à E ne peut avoir aucun point hors de P_1. Soit E_1 l'ensemble des points de E situés sur P_1. Si un ensemble partiel de E est dense en lui-même, cet ensemble est agrégé à E_1. Si E_1 est partout dense sur P_1, E_1 coïncide avec E', P_1 avec P. Tel est le cas de l'ensemble E des points de première espèce d'un ensemble parfait, augmenté des milieux des contigus z'. L'ensemble de ces derniers est, bien que non réductible, non dense sur tout ensemble parfait. Supposons au contraire E_1 non partout dense sur P_1. Soit P_2 le noyau du dérivé de E_1. P_2 est inclus dans P_1. Tout ensemble agrégé à E_1 et dense en lui-même ne peut avoir aucun point hors de P_2. Il en est donc de même de tout ensemble agrégé à E et dense en lui-même, puisque cet ensemble est nécessairement agrégé à E_1. Nous continuons ainsi à définir des ensembles parfaits P_i inclus les uns dans les autres pour les valeurs entières de i. Déterminons

---

Q est parfait. Soient E_1 l'ensemble des points de E agrégés à Q et j un intervalle quelconque contenant au moins un point de Q. Sur j, E est non dénombrable. Or, les points de E étrangers à E_1 et situés dans j sont dans les intervalles contigus à Q. Ils sont donc en infinité dénombrable. Donc, E_1 agrégé à Q possède des points (et même en infinité non dénombrable) dans j. Donc, E_1 est partout dense sur Q.

la règle de définition de P_λ pour toutes les valeurs du nombre transfini λ de première ou de seconde espèce. Supposons, dans tous les cas, $P_{\lambda'}$ défini pour toutes les valeurs de λ' inférieures à λ et supposons aussi établi que tout ensemble partiel de E dense en lui-même est nécessairement agrégé à $P_{\lambda'}$ ou encore que, dans tout intervalle contigu à $P_{\lambda'}$, E est non dense sur tout ensemble parfait. Alors, soit d'abord λ de première espèce; il a un précédent $\lambda - 1$. Soit $E_{\lambda-1}$ l'ensemble commun à $P_{\lambda-1}$ et à E. Par hypothèse, un ensemble agrégé à E et dense en lui-même ne peut avoir aucun point hors de $P_{\lambda-1}$. Il est donc agrégé à $E_{\lambda-1}$. Tel est notre départ. Définissons P_λ comme étant le noyau du dérivé de $E_{\lambda-1}$. Un ensemble agrégé à $E_{\lambda-1}$ et dense en lui-même ne saurait avoir de points hors de P_λ. Donc un ensemble agrégé à E et dense en lui-même est agrégé à l'ensemble E_λ commun à P_λ et E. Donc, P_λ est défini connaissant $P_{\lambda-1}$ et la propriété essentielle de E relativement à $P_{\lambda-1}$ est maintenue pour P_λ. Si maintenant λ est de seconde espèce, les ensembles $P_{\lambda'}$ d'indices inférieurs à λ sont chacun inclus dans tous les précédents. Ils ont donc en commun un ensemble fermé P'_λ. Si l'on suppose démontré que tout ensemble dense en lui-même et agrégé à E appartient à tous les $P_{\lambda'}$, un tel ensemble est agrégé à P'_λ. Soit P_λ le noyau de P'_λ. Les points de P'_λ étrangers à P_λ forment un ensemble non dense sur tout ensemble parfait. Donc, P_λ qui est défini par la règle précédente contient tout ensemble dense en lui-même agrégé à E.

Les ensembles parfaits P_λ définis pour chaque valeur de λ sont tous inclus dans chacun des ensembles précédents. Si P_μ coïncide avec $P_{\mu+1}$, l'ensemble commun à E et à P_μ, soit E_μ, a pour noyau de son dérivé, P_μ lui-même. Donc, il est partout dense sur P_μ auquel il est agrégé. D'ailleurs, d'après les propriétés des P_λ, en dehors de P_μ, E est non dense sur tout ensemble parfait. Donc, P n'est autre que P_μ, E' coïncide avec E_μ, et tous les ensembles ultérieurs à P_μ coïncident avec P_μ. Si donc par contre tous les ensembles consécutifs à P_μ ne coïncident pas avec P_μ, $P_{\mu+1}$ est inférieur à P_μ, en ce sens que P_μ contient des points non agrégés à $P_{\mu+1}$. Mais d'après une propriété connue des suites bien ordonnées d'ensembles fermés dont chacun est moindre que tous les précédents, il existe un nombre fini ou transfini, — et parmi tous ceux qui jouissent de cette propriété, il y en a un inférieur à tous les autres (caractère fondamental des ensembles bien ordon-

nés), nous le désignons par $\mu -$, tel que, ou bien P_μ est vide de points, ou bien P_μ, non nul, coïncide avec tous les ensembles suivants. Dans le premier cas, E est non dense sur tout ensemble parfait. Dans le second cas, P coïncide avec P_μ, comme nous l'avons dit. La décomposition de E en E′ et E″ est donc effectuée quel que soit E.

Il est facile de former des exemples dans lesquels P_μ existe pour toute valeur de μ donnée d'avance, E étant de plus nul sur P_μ, ce qui entraîne que tous les ensembles P_λ sont décroissants jusqu'à l'indice μ inclus. Pour $\mu = 1$, nous prenons l'ensemble E des milieux des intervalles contigus à un ensemble parfait Q. Alors, P_1 est Q et E_1, comme P_2, sont nuls. Pour $\mu = 2$ et les valeurs suivantes, commençons par réaliser une correspondance des points du segment $0 - 1$ et des points de Q, de manière que les points de première espèce de Q, a_n, b_n extrémités d'un même intervalle contigu correspondent simultanément à un même point c_n compris entre 0 et 1, l'ordre respectif des c_n et des intervalles contigus homologues étant conservé, les c_n étant partout denses sur le segment $0 - 1$, et la correspondance étant ensuite doublement uniforme et croissante entre les points de seconde espèce de Q et ceux du continu distincts des c_n. Alors, si nous transformons un ensemble E du segment $0 - 1$ en remplaçant chaque point de E distinct des c_n par son homologue unique dans Q, chaque point de E isolé coïncidant avec un c_n, par l'un ou l'autre de ses homologues a_n ou b_n ou par les deux à la fois indifféremment, chaque point c_n de E limite de points de E par le point a_n, le point b_n ou les deux à la fois selon que c_n est limite de E à gauche, à droite ou des deux côtés, alors on obtient un ensemble H agrégé à Q et que nous appelons l'homologue de E. Il est visible que cette correspondance précisée conserve les classes d'ensembles fermés parfaits et denses en eux-mêmes.

Cela étant, si nous connaissons un ensemble E possédant un P_μ sur lequel E est nul, transformons, comme il vient d'être dit, le continu $0 - 1$ en l'ensemble parfait P_μ jouant le rôle de Q. Nous prenons sur ce même continu un ensemble parfait non dense H et nous désignons par e l'ensemble des milieux des contigus de H ou tout autre ensemble réductible dans les contigus de H et nul sur lui. A e et à H correspondent sur P_μ un ensemble η dont nous accroissons E et un ensemble parfait non dense sur P_μ et qui sera $P_{\mu+1}$ pour l'ensemble $E + \eta$. Nous

avons donc réalisé le cas où $P_{\mu+1}$ existe, E étant nul sur lui. Cette construction permet pour commencer d'avoir un ensemble E pour lequel P_2 n'est pas nul, et de proche en proche pour chaque valeur entière de n un ensemble E pour lequel P_μ existe sans contenir aucun point de E. Si l'on sait, quel que soit λ inférieur à μ supposé de seconde espèce, construire un ensemble possédant un P_λ et nul sur lui, nous rangeons les contigus à un ensemble parfait H en une suite u_n. Nous prenons parmi les λ une suite croissante $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, tendant vers μ. Sur u_n nous construisons un ensemble homothétique à un ensemble possédant un P_{λ_n} et nul sur lui. L'ensemble total admet, quel que soit m, un P_{λ_n} contenant H en totalité et des points dans les u_n d'indice supérieur à $m-1$, exclusivement. Donc, il admet un P_μ constitué par H et sur lequel il est nul. De là, on passe, comme nous l'avons dit, à la construction d'un ensemble E admettant un $P_{\mu+1}$ et nul sur lui, et l'on continue sans arrêt possible.

Ayant un ensemble E admettant un P_μ de rang donné à l'avance et distinct des P_λ d'indice inférieur, on passe du cas où E est nul sur P_μ, et par suite non dense sur tout ensemble parfait, au cas où E contient un ensemble partiel dense en lui-même en ajoutant à E l'ensemble des points de première espèce de P_μ. Le complémentaire E'' de E' sur E sera non dense sur tout ensemble parfait et l'on pourra lui attribuer eu égard à cette propriété l'ordre μ. J'ai déjà proposé au cours de ce Mémoire (**33**), pour les ensembles non denses sur tout ensemble parfait, l'appellation d'*ensembles clairsemés*. Donc *tout ensemble se décompose en un ensemble dense en lui-même et un ensemble clairsemé*. Le premier sera, comme dans le cas des ensembles fermés, appelé par nous le *noyau* de l'ensemble décomposé. Enfin, notons que la décomposition est unique et coïncide avec celle que nous avons réalisée, si le noyau E' est par définition le plus grand ensemble dense en lui-même contenu dans E, et si par conséquent E'' n'a aucun point sur le dérivé parfait de E' [1].

---

[1] Il paraîtra prochainement une suite à ce Mémoire dans le *Bulletin de la Société mathématique*.

Sur quelques points de la théorie des invariants intégraux;

PAR E. GOURSAT.

1. Je me propose de compléter sur quelques points les résultats d'un Mémoire antérieur *Sur les invariants intégraux* (*Journal de Mathématiques*, 6e série, t. IV, 1908, p. 331-365). J'emploierai les mêmes notations que dans ce travail, sauf que j'écrirai, afin d'abréger, un seul signe $\int$ pour désigner une intégrale multiple, ce qui ne peut entraîner aucune ambiguïté.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un système de n variables indépendantes et $A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} (p \leq n)$ un système de fonctions de ces n variables, dont chacune est affectée de p indices différents $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, pris parmi les n premiers nombres. Les fonctions dont les indices ne diffèrent que par leur ordre sont égales *au signe près*. Si $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_p)$ est une nouvelle permutation des indices $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$, on a

$$A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} = \pm A_{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_p},$$

le signe $+$ convenant au cas où les deux permutations sont de la même classe, et le signe $-$ au cas où ces permutations sont de classes différentes. L'expression

$$I_p = \int \Sigma A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p},$$

où le signe Σ est étendu à tous les arrangements des n premiers nombres p à p, représente une intégrale multiple d'ordre p. Pour avoir la valeur de cette intégrale étendue à une multiplicité (E_p) de l'espace à n dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, nous supposerons les coordonnées d'un point de cette multiplicité exprimées au moyen de p paramètres

$u_1, u_2, \ldots, u_p$, de façon que la multiplicité (E_p) corresponde point par point à une autre multiplicité (e_p) de l'espace à p dimensions $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$. La valeur de l'intégrale I_p, étendue à la multiplicité (E_p), peut alors s'écrire sous l'une ou l'autre des deux formes

$$I_p = \int \left(\Sigma A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p} \right) du_1 \, du_2 \ldots du_p,$$

le signe Σ étant étendu à tous les arrangements p à p des n indices,

$$I_p = \int \left[\Sigma A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \frac{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_p})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_p)} \right] du_1 \, du_2 \ldots du_p,$$

le signe Σ étant étendu à toutes les combinaisons des indices p à p, et les deux intégrales étant étendues à la multiplicité (e_p). Quand on change l'ordre dans lequel on écrit les variables $u_1, u_2, \ldots, u_p$, la valeur de I_p peut changer de signe, de même qu'une intégrale de surface change de signe quand on change le côté de la surface suivant lequel elle est prise. Dans ce qui suit, nous aurons à considérer des intégrales étendues à une multiplicité (E_p), qui varie d'une manière continue avec un paramètre t. Les coordonnées d'un point de cette multiplicité sont fonctions des p paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_p$ et de t. Une fois qu'on a choisi l'ordre dans lequel on écrit les variables x_i et les paramètres $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ pour une valeur particulière de t, on conservera le même ordre pour toutes les valeurs de t. Il est clair que la valeur de l'intégrale multiple est une fonction continue de t.

2. Soit

$$(1) \qquad I_p = \int \Sigma A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p}$$

un invariant intégral d'ordre p du système

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt;$$

je supposerai, pour fixer les idées, que l'on a écrit tous les coefficients $A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}$ correspondant à tous les arrangements p à p des n premiers nombres. Soit E_{p-1} une multiplicité à $p-1$ dimensions de l'espace à n dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ non formée de caractéristiques, c'est-

à-dire de courbes intégrales des équations (2). Quand on fait varier t de 0 à T, le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui, pour $t = 0$, coïncide avec un point $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ de E_{p-1} décrit un segment de caractéristique C allant du point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ à un point $(x_1^T, x_2^T, \ldots, x_n^T)$, et ces segments de caractéristiques engendrent une multiplicité E_p limitée par E_{p-1}, par la multiplicité E'_{p-1} décrite par le point $(x_1^T, x_2^T, \ldots, x_n^T)$ et par une autre multiplicité E''_{p-1} engendrée par les segments de caractéristiques issues des différents points de la multiplicité E_{p-2} qui limite E_{p-1}. Nous allons calculer la valeur de l'intégrale I_p étendue à cette multiplicité E_p. Pour cela, supposons les coordonnées d'un point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de E_{p-1} exprimées au moyen de $p-1$ variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$; les coordonnées d'un point de la multiplicité E_p seront alors des fonctions de $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$ et de la variable t, pour lesquelles on aura

$$(2)' \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

L'intégrale cherchée peut s'écrire

$$\begin{aligned} I_p &= \int_{E_p} \Sigma A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p} \\ &= \int_{E_p} \Sigma A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial u_2} \ldots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial t} du_1 \ldots du_{p-1} dt, \end{aligned}$$

la sommation indiquée par le signe Σ étant étendue à tous les arrangements d'indices p à p. On peut encore écrire I_p, d'après les relations (2)',

$$(3) \qquad I_p = \int_0^T dt \int_{E_{p-1}} \Sigma C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial u_2} \ldots \frac{\partial x_{\alpha_{p-1}}}{\partial u_{p-1}} du_1 \ldots du_{p-1},$$

en posant

$$(4) \qquad C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} = \sum_{i=1}^{n} A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, i} X_i;$$

cette expression de I_p prend aussi la forme abrégée équivalente

$$(3)' \qquad I_p = \int_0^T dt \int_{E_{p-1}} \Sigma C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{p-1}}.$$

La valeur de I_p est une fonction de la variable T, dont la dérivée pour $T = 0$ a pour valeur

$$(5) \qquad \left(\frac{dI_p}{dT}\right)_0 = \int_{E_{p-1}} \Sigma C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{p-1}}.$$

Considérons en second lieu une multiplicité E_p définie en partant de E_{p-1} d'une façon plus générale. A chaque point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de E_{p-1} faisons correspondre une valeur de θ variant d'une manière continue avec la position de ce point. Le segment de caractéristique issue du point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ décrit par le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ quand t varie entre 0 et θ, engendre une multiplicité E_p, bornée par E_{p-1} et une autre multiplicité E'_{p-1} lieu de l'extrémité du segment variable de caractéristique. De chaque point m de cette multiplicité E_p part une caractéristique; si l'on fait varier t à 0 à T, le point m vient occuper une position m', dont le lieu est une autre multiplicité E'_p que l'on peut évidemment déduire de E_p en ajoutant à celle-ci la multiplicité μ'_p décrite par E'_{p-1} quand on fait croître t de 0 à T, et en retranchant la multiplicité μ_p décrite par E_{p-1} quand t varie de 0 à T. Puisque I_p est un invariant intégral, l'intégrale I_p a la même valeur pour les multiplicités E_p et E'_p, et par suite pour les multiplicités μ_p et μ'_p. La dérivée $\left(\frac{dI_p}{dT}\right)_0$ a donc la même valeur pour les deux multiplicités E_{p-1} et E'_{p-1},

$$(6) \quad \int_{E_{p-1}} \Sigma C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_{p-1}} = \int_{E'_{p-1}} \Sigma C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots, dx_{\alpha_{p-1}},$$

quelle que soit la façon dont θ varie avec la position du point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ sur E_{p-1}. En particulier, si l'on suppose que θ a une valeur constante, on voit que

$$(7) \qquad I_{p-1} = \int \Sigma C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{p-1}}$$

est un invariant intégral d'ordre $p - 1$ pour les équations (2). Mais c'est un invariant intégral d'une espèce particulière, car il conserve la même valeur pour toute multiplicité que l'on déduit de E_{p-1} en faisant décrire à chaque point de E_{p-1} la caractéristique issue de ce point suivant une loi arbitraire. En continuant d'employer le langage géo-

métrique, si nous appelons *tube de caractéristiques* la multiplicité d'ordre p engendrée par les caractéristiques issues des différents points d'une multiplicité d'ordre $p-1$, non formée de caractéristiques, et *section* de ce tube toute multiplicité continue d'ordre $p-1$ obtenue en prenant un point arbitrairement sur chacune de ces caractéristiques, on peut dire que l'intégrale I_{p-1} a la même valeur pour toutes les sections d'un tube caractéristique. Nous dirons pour abréger que tout invariant intégral qui jouit de cette propriété est *attaché aux caractéristiques*. D'après cela, tout invariant attaché aux caractéristiques est aussi un invariant intégral pour le système d'équations différentielles obtenu en multipliant $X_1, X_2, \ldots, X_n$ par une fonction arbitraire $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, puisque les caractéristiques restent les mêmes.

Ce qui précède n'est au fond que le raisonnement de M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. XIII, p. 66), présenté sous sa forme la plus générale. Le résultat peut s'énoncer comme il suit :

De tout invariant intégral absolu I_p *du système* (2), *on peut déduire* (*en général*) *un invariant* I_{p-1} *attaché aux caractéristiques de ce système.*

On est ainsi conduit à se poser les deux questions suivantes :

1° Obtient-on par ce procédé tous les invariants intégraux attachés aux caractéristiques ?

2° Un invariant intégral étant donné, comment reconnaître s'il est attaché aux caractéristiques ?

On verra que ces deux questions se résolvent en même temps d'une façon très simple.

3. Dans le travail antérieur déjà rappelé, j'ai appelé (E) l'opération par laquelle on passe de l'invariant (1) I_p à l'invariant (7) I_{p-1}. La liaison entre ces deux invariants peut être résumée par la relation

$$\left(\frac{dI_p}{d\Gamma}\right)_{\Gamma=0} = I_{p-1}, \tag{8}$$

l'invariant I_{p-1} étant étendu à une multiplicité quelconque E_{p-1} et l'invariant I_p à la multiplicité E_p que l'on déduit de E_{p-1} par le procédé expliqué plus haut. Il est clair que cette relation se conserve

quand on change d'une façon quelconque les fonctions inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sans changer la variable t. En d'autres termes l'opération (E) est covariante pour toute transformation de la forme

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

après cette transformation, les équations (2) sont remplacées par un nouveau système

$$(2)' \qquad \frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n} = dt.$$

tandis que les invariants I_p et I_{p-1} deviennent respectivement

$$I'_p = \int \Sigma A'_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} dy_{\alpha_1} \ldots dy_{\alpha_p}, \qquad I'_{p-1} = \int \Sigma C'_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}} dy_{\alpha_1} \ldots dy_{\alpha_{p-1}},$$

L'invariant I'_{p-1} se déduit de I'_p de la même façon que I_{p-1} se déduit de I_p, c'est-à-dire que l'on a

$$C'_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} = \sum_{i=1}^{n} A'_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, i} Y_i,$$

comme on peut le vérifier directement.

L'opération (E) appliquée à un invariant I_p conduit à un invariant I_{p-1} identiquement nul si les coefficients $A_{\alpha_1 \alpha_2, \ldots, \alpha_p}$ vérifient les relations

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, i} X_i = 0$$

pour tous les arrangements d'indices $p-1$ à $p-1$. J'ai appelé $I_p^{(e)}$ les invariants qui jouissent de cette propriété. On voit immédiatement que tout invariant I_p, déduit d'un invariant I_{p+1} par l'opération (E) est $I_p^{(e)}$; la réciproque sera établie un peu plus loin.

On peut caractériser les invariants $I_p^{(e)}$ par la propriété suivante : *la valeur d'un invariant intégral $I_p^{(e)}$, étendue à une multiplicité quelconque d'ordre p, engendrée par des courbes caractéristiques, est toujours nulle; et réciproquement, tout invariant intégral jouissant de cette propriété est un invariant intégral $I_p^{(e)}$.*

Toute multiplicité d'ordre p composée de caractéristiques peut être définie comme la multiplicité E_p considérée plus haut; les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un point de cette multiplicité sont des fonctions

de p variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}, t$, dont les dérivées partielles $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ sont égales aux fonctions X_i. La valeur de l'invariant intégral I_p étendue à une multiplicité de cette espèce a donc pour expression

$$I_p = \int_{E_p} \Sigma A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, i} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_{p-1}}}{\partial u_{p-1}} X_i \, du_1 \, du_2 \ldots du_{p-1} \, dt,$$

ce qui peut s'écrire encore

$$I_p = \int_{E_p} \sum \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_{p-1}}}{\partial u_{p-1}} \left(\sum_{i=1} A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, i} X_i \right) du_1 \, du_2 \ldots du_{p-1} \, dt.$$

Cette intégrale ne peut être nulle quelle que soit la multiplicité considérée que si tous les éléments sont nuls, c'est-à-dire si l'on a identiquement

$$\sum \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_{p-1}}}{\partial u_{p-1}} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, i} X_i \right) = 0.$$

Il en est évidemment ainsi si les coefficients $A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}$ de l'invariant intégral I_p vérifient les relations (9). Inversement, ces conditions sont nécessaires, car pour un système de valeurs données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut choisir arbitrairement les valeurs de toutes les dérivées partielles $\frac{\partial x_k}{\partial u_i}$. L'invariant considéré est donc un invariant $I_p^{(e)}$.

Il est évident que cette propriété est indépendante du choix des inconnues. Si un changement de variables $x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ramène le système (2) au système (2)′ et l'invariant intégral (1) à la forme

$$I'_p = \int \Sigma A'_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \, dy_{\alpha_1} \ldots dy_{\alpha_p},$$

les coefficients du nouvel invariant I'_p vérifient les relations

$$(9)' \qquad \sum_{i=1}^{n} A'_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, i} X_i = 0,$$

si les relations (9) sont vérifiées.

4. Supposons en particulier que l'on ait ramené, par un changement de fonctions inconnues, le système (2) à la forme réduite souvent employée par Poincaré dans ses raisonnements,

$$\frac{dy_1}{0} = \frac{dy_2}{0} = \ldots = \frac{dy_{n-1}}{0} = \frac{dy_n}{1} = dt. \tag{10}$$

Tout invariant intégral d'ordre p est de la forme

$$\int B_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} dy_{\alpha_1} dy_{\alpha_2} \ldots dy_{\alpha_p},$$

les coefficients $B_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}$ ne dépendant pas de y_n, et pouvant être des fonctions quelconques de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Avec ce système de variables les conditions (9) deviennent

$$B_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_n} = 0.$$

Donc la différentielle dy_n ne doit pas figurer dans l'expression de l'invariant, pour qu'il soit un invariant $I_p^{(e)}$; un invariant de cette espèce ne contient donc ni y_n, ni dy_n, tandis qu'un invariant intégral quelconque ne contient pas y_n, mais peut contenir dy_n. Pour appliquer l'opération (E) à un invariant I_p, nous supposerons qu'on l'écrive en ne prenant que les combinaisons de n indices p à p, et en mettant toujours le facteur dy_n le dernier dans les termes où ce facteur figure. Pour passer de I_p à l'invariant qui s'en déduit $I_{p-1}^{(e)}$, il suffit alors de supprimer le facteur dy_n dans tous les termes où il figure, et de supprimer tous les termes qui ne contiennent pas ce facteur.

Inversement, étant donné un invariant $I_p^{(e)}$, on peut le déduire d'un invariant I_{p+1} par l'opération (E) (et en général d'une infinité de façons). En effet, cet invariant $I_p^{(e)}$ étant écrit en ne prenant que les combinaisons des n indices p à p, il suffira d'ajouter le facteur dy_n à chaque terme de $I_p^{(e)}$, et de lui ajouter ensuite un invariant quelconque $I_{p+1}^{(e)}$, pour avoir un invariant d'ordre $p+1$ dont l'invariant $I_p^{(e)}$ se déduira par l'opération (E). Il est clair qu'on aura ainsi tous les invariants d'ordre $p+1$ dont l'invariant donné $I_p^{(e)}$ se déduit par l'opération (E). Il n'y a qu'un moyen d'appliquer ce procédé lorsque $p = n-1$, car il n'existe évidemment aucun invariant $I_n^{(e)}$ sauf zéro. Tout invariant $I_{n-1}^{(e)}$ correspond donc à un multiplicateur déterminé du système d'équations différentielles et réciproquement. C'est du reste

en partant d'un multiplicateur que Poincaré a donné la construction générale d'un invariant I_{n-1} attaché aux caractéristiques, dans le cas particulier où $n = 3$ (*voir* aussi le n° **16** de mon premier Mémoire). Les autres théorèmes démontrés dans ce travail (n^{os} **6-9**) sur les invariants $I_p^{(e)}$ pourraient aussi être établis aisément sur la forme réduite. Je ne m'y arrêterai pas. Remarquons seulement qu'il est évident, d'après l'expression de ces invariants, qu'ils sont attachés aux caractéristiques. Supposons, pour simplifier, $n = 3$; un invariant $I_2^{(e)}$ est de la forme

$$I_2^{(e)} = \int\int B(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2.$$

Les caractéristiques sont des droites parallèles à l'axe Oy_3. Étant donné un tube de caractéristiques, il est clair que la valeur de l'intégrale $I_2^{(e)}$, étendue à une section quelconque de ce tube, est la même pour toutes ces sections.

5. Il nous reste à démontrer que les invariants $I_p^{(e)}$ sont les seuls invariants attachés aux caractéristiques. La démonstration directe suivante s'applique à la fois à la proposition elle-même et à sa réciproque. Reprenons, comme au n° **2**, une multiplicité E_p $(p < n)$ non formée de caractéristiques, limitée par une multiplicité E_{p-1} qui peut disparaître si E_p est une multiplicité fermée. De tout point m de E_p part une caractéristique, sur laquelle nous prenons arbitrairement un point m', de façon à respecter la continuité. Quand le point m décrit E_p, le segment mm' de caractéristique engendre une multiplicité E_{p+1}, dont la limite se compose :

1° De la multiplicité donnée E_p;

2° De la multiplicité E'_p décrite par l'extrémité m' du segment de caractéristique considérée lorsque m décrit E_p;

3° De la multiplicité E''_p engendrée par les segments de caractéristiques issues des différents points de E_{p-1}.

Cela étant, soit I_p un invariant intégral. La différence entre les valeurs de l'intégrale multiple I_p étendue aux deux multiplicités E_p et E'_p dans des sens correspondants (n° **1**) est égale, d'après le théorème de Stokes généralisé, à l'intégrale I_p étendue à E''_p, augmentée d'une

intégrale $I_{p+1}^{(d)}$, étendue à la multiplicité E_{p+1}, $I_{p+1}^{(d)}$ étant un invariant intégral d'ordre $p+1$ qui se déduit de I_p par l'opération (D) (*voir* le Mémoire cité n° 2). Pour que cette différence soit toujours nulle, il faut et il suffit que l'intégrale I_p étendue à E_p'' et l'intégrale $I_{p+1}^{(d)}$ étendue à E_{p+1} soient nulles séparément.

Cette condition est nécessaire. En effet, on peut supposer que la multiplicité E_p'' disparaît; il suffit pour cela de limiter E_p et E_p'' à la même multiplicité E_{p-1}. L'intégrale $I_{p+1}^{(d)}$ étendue à la multiplicité E_{p+1} formée de caractéristiques doit donc être nulle, ce qui exige que l'invariant intégral $I_{p+1}^{(d)}$ soit un invariant $I_{p+1}^{(d,e)}$ (n° 3). S'il en est ainsi, l'intégrale I_p étendue à la multiplicité E_p'', qui est une multiplicité quelconque formée de caractéristiques, doit aussi être nulle. Donc l'invariant I_p doit lui-même être un invariant $I_p^{(e)}$. Cette dernière condition entraîne la première, comme je l'ai démontré dans le premier travail (n° 8).

En résumé, les seuls invariants attachés aux caractéristiques sont les invariants $I_p^{(e)}$, dont les coefficients vérifient les relations (9).

Remarque I. — On peut encore démontrer comme il suit que les conditions (9) sont nécessaires pour que I_p soit un invariant attaché aux caractéristiques. En effet, s'il en est ainsi, les conditions qui expriment que I_p est un invariant intégral doivent encore être vérifiées quand on multiplie les fonctions X_i par une fonction arbitraire $\lambda(x_1, \ldots, x_n)$, puisque cela ne change pas les caractéristiques. Pour qu'il en soit ainsi, la fonction λ doit vérifier les relations

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_{\alpha_1}}\left(\sum_h A_{h\alpha_1,\ldots,\alpha_p} X_h\right) + \frac{\partial\lambda}{\partial x_{\alpha_2}}\left(\sum_h A_{\alpha_1 h,\ldots,\alpha_p} X_h\right) + \ldots = 0.$$

et, comme cette fonction λ est arbitraire, les coefficients $A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_p}$ doivent satisfaire aux conditions (9).

Remarque II. — Il résulte aussi de la démonstration précédente que, si une expression

$$U = \int \sum A_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}\, dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p}$$

est une différentielle exacte, et si les coefficients vérifient les condi-

tions (9), cette expression est un invariant $I_p^{(d,e)}$ des équations (2). Il est facile de vérifier ce résultat en combinant les équations (9) avec les relations qui expriment que U est une différentielle exacte.

6. Nous n'avons considéré jusqu'ici que des invariants absolus. Mais on peut aussi définir des invariants relatifs attachés aux caractéristiques. Soit, pour fixer les idées,

$$J_1 = \int A_1\, dx_1 + \ldots + A_n\, dx_n$$

un invariant relatif du premier ordre du système (2), on peut le remplacer par l'invariant absolu

$$I_2^{(d)} = \int \sum \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \right) dx_i\, dx_k.$$

Si cet invariant $I_2^{(d)}$ est $I_2^{(d,e)}$, le raisonnement du numéro précédent prouve que l'intégrale J_1 prise le long d'une courbe fermée quelconque C_0 est égale à la même intégrale prise le long d'une autre courbe fermée C_1, obtenue en prenant, suivant une loi arbitraire, un point m' sur la caractéristique issue d'un point m de C_0. En effet, la différence de ces deux intégrales est égale, d'après le théorème de Stokes généralisé, à l'intégrale double $I_2^{(d,e)}$ étendue à la multiplicité E_2 engendrée par les segments de caractéristiques $m\,m'$, intégrale qui est nulle d'après la propriété qui caractérise les invariants $I_p^{(e)}$.

De tout invariant $I_{p+1}^{(d,e)}$ on peut de même déduire un invariant absolu ou relatif d'ordre p attaché aux caractéristiques.

Il peut se faire qu'un invariant intégral I_p ne soit un invariant $I_p^{(e)}$ que pour l'ensemble des caractéristiques qui satisfont à certaines conditions. Supposons par exemple que les équations (2) admettent une intégrale première $F = C$. Les caractéristiques pour lesquelles la constante C a une valeur déterminée forment un système dépendant de $(n-2)$ constantes arbitraires seulement, et peuvent être considérées comme les caractéristiques d'un système de $(n-1)$ équations différentielles que l'on obtiendrait en résolvant par rapport à l'une des variables, x_n par exemple, la relation $F = C$, et portant cette valeur dans les équations

$$(2)' \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{X_{n-1}} = dt.$$

Si l'on fait la même substitution dans l'invariant I_p, on obtient un invariant I'_p des équations (2)' qui peut être un invariant $I_p^{(c)}$ pour ce système. Mais on peut se dispenser de ce calcul, en vérifiant que l'intégrale I_p est nulle sur toute multiplicité E_p composée de caractéristiques pour lesquelles la constante C a la même valeur numérique. Considérons par exemple le système canonique

$$(11) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

qui admet l'invariant intégral

$$(12) \qquad I_2 = \int\int dx_1\, dp_1 + \ldots + dx_n\, dp_n;$$

à moins que F ne soit une constante, cet invariant I_2 n'est pas $I_2^{(c)}$. D'autre part, le système (11) admet l'intégrale première $F = C$. Nous allons montrer que l'intégrale I_2 étendue à toute multiplicité E_2 engendrée par des caractéristiques, pour lesquelles la constante C a une valeur numérique déterminée, est toujours nulle. En effet, les coordonnées (x_i, p_i) de tout point d'une multiplicité de cette espèce peuvent s'exprimer au moyen de deux variables indépendantes t et u, les dérivées par rapport à t étant données par les formules

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

On a alors

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{D(x_i, p_i)}{D(t, u)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u} \right) = \frac{\partial F}{\partial u}.$$

Mais F étant constant sur cette multiplicité, on a aussi

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

et par suite la valeur de I_2 est nulle (*cf.* Hadamard, *Calcul des variations*, p. 154-155).

7. Les propriétés des invariants $I_p^{(c)}$ expliquent de la façon la plus simple pourquoi la connaissance d'un invariant $I_{n-2}^{(c)}$ permet de

trouver une équation $Y(f) = 0$ formant avec l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

un système complet. Supposons d'abord $n = 3$, et soit

$$(13) \qquad I_1^{(e)} = \int A_1\, dx_1 + A_2\, dx_2 + A_3\, dx_3$$

un invariant intégral du système

$$(14) \qquad \frac{dx_1}{dX_1} = \frac{dx_2}{dX_2} = \frac{dx_3}{dX_3} = dt,$$

dont les coefficients A_1, A_2, A_3 vérifient la relation

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 = 0.$$

Soit Γ une courbe telle que les coordonnées (x_1, x_2, x_3) d'un de ses points soient des fonctions d'un paramètre u vérifiant la relation

$$A_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} + A_2 \frac{\partial x_2}{\partial u} + A_3 \frac{\partial x_3}{\partial u} = 0.$$

Il existe évidemment une infinité de courbes de cette espèce puisqu'on peut choisir arbitrairement deux des coordonnées x_1, x_2, x_3, en fonction de u. Nous supposerons de plus que la courbe Γ n'est pas une caractéristique; il suffit pour cela de prendre pour x_1 et x_2 des fonctions de u telles que $X_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} - X_1 \frac{\partial x_2}{\partial u}$ ne soit pas nul. Cela étant, les caractéristiques issues des divers points de Γ engendrent une surface S, et l'intégrale $\int A_1\, dx_1 + A_2\, dx_2 + A_3\, dx_3$, prise le long d'une courbe quelconque située sur S, est nulle, puisque cette intégrale est nulle le long de Γ, et que l'invariant considéré est $I_1^{(e)}$. Tout élément linéaire de S satisfait donc à la relation

$$(15) \qquad A_1\, dx_1 + A_2\, dx_2 + A_3\, dx_3 = 0;$$

comme il passe évidemment une surface de cette espèce par tout point de l'espace, il s'ensuit que l'équation précédente est complètement intégrable, et l'intégration donnera une intégrale première du système (14).

Ce résultat se vérifie immédiatement au moyen des relations

$$A_1X_1 + A_2X_2 + A_3X_3 = 0,$$
$$X(A_i) + A_1\frac{\partial X_1}{\partial x_i} + A_2\frac{\partial X_2}{\partial x_i} + A_3\frac{\partial X_3}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

qui expriment que $I_1^{(c)}$ est un invariant absolu. En différentiant la première par rapport à x_i et comparant aux suivantes, on en déduit

$$\frac{X_1}{\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}} = \frac{X_2}{\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}} = \frac{X_3}{\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1}},$$

et par suite

$$A_1\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) + A_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) + A_3\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) = 0,$$

ce qui exprime que l'équation $A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3$ est complètement intégrable. Si l'invariant $I_1^{(c)}$ n'est pas un invariant $I_1^{(d,e)}$, on en déduira par l'opération (D) un invariant $I_2^{d,e}$ et par suite un multiplicateur. L'intégration du système (14) s'achèvera donc par une quadrature.

Plus généralement, considérons un invariant $I_{n-2}^{(c)}$

$$I_{n-2}^{(c)} = \int \Sigma A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{n-2}}.$$

On peut déterminer une infinité de multiplicités E_{n-2}, non composées de caractéristiques, telles que l'intégrale $I_{n-2}^{(c)}$ étendue à ces multiplicités soit nulle. En effet, supposons cette multiplicité E_{n-2} définie par deux équations

$$x_{n-1} = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}), \qquad x_n = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2});$$

l'intégrale étendue à cette multiplicité a pour expression

$$\int B\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-2},$$

B dépendant des variables x_i et des dérivées partielles du premier ordre des fonctions φ_1 et φ_2. Dans l'équation $B = 0$, on peut choisir arbitrairement l'une des fonctions φ_1, φ_2, et l'autre est déterminée par une équation aux dérivées partielles du premier ordre. On peut même

choisir la multiplicité de façon qu'elle passe par une multiplicité E_{n-3} donnée à l'avance, non composée de courbes caractéristiques.

Soit E_{n-2} une multiplicité non composée de caractéristiques satisfaisant à la condition précédente. Soit E_{n-1} la multiplicité engendrée par les caractéristiques issues des divers points de E_{n-2}. Nous allons montrer que *l'intégrale* $I_{n-2}^{(e)}$ *étendue à une multiplicité quelconque* E'_{n-2} *située sur* E_{n-1} *est nulle*. En effet, E'_{n-2} se déduit de E_{n-2} en prenant un point sur chaque caractéristique issue des divers points de E_{n-2}, et, d'après la propriété essentielle de l'invariant $I_{n-2}^{(e)}$, l'intégrale étendue à E'_{n-2} est égale à l'intégrale étendue à E_{n-2}, c'est-à-dire nulle.

Ces multiplicités E_{n-1}, qui sont évidemment des multiplicités intégrales du système (2), peuvent être obtenues directement. D'une façon plus générale, pour que l'intégrale

$$I_p = \int \Sigma A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p} dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_p}$$

étendue à toute multiplicité E_p renfermée dans la multiplicité E_{n-1} définie par l'équation $F = 0$ soit nulle, on vérifie sans peine que la fonction F doit satisfaire aux conditions suivantes, de formes différentes suivant la parité de p :

1° Si p est impair on a les conditions

$$A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} - A_{\alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}} \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + A_{\alpha_{p+1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}} \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha_p}} = 0,$$

avec des signes + et — alternativement.

2° Si p est pair, on n'a que des signes +

$$A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} + A_{\alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}} \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots = 0.$$

Dans le cas actuel, où $p = n - 2$, nous savons *a priori* que ces équations doivent former un système complet. On le vérifie immédiatement en supposant le système (2) ramené à la forme réduite (10).

8. Je vais montrer en terminant comment on peut compléter un résultat démontré dans le Mémoire antérieur. Soit

$$A = \int A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n$$

un invariant intégral relatif (ou absolu) du système (2); les conditions pour qu'il en soit ainsi expriment que l'expression

$$(16)\quad \left(\sum_{k=1}^{n} X_k B_{1k}\right) dx_1 + \left(\sum_{k=1}^{n} X_k B_{2k}\right) dx_2 + \ldots + \left(\sum_{k=1}^{n} X_k B_{nk}\right) dx_n,$$

où

$$B_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i},$$

est une différentielle exacte dU, et il est clair que $U = \text{const.}$ est une intégrale première du système (2). Il peut d'ailleurs arriver que la fonction U se réduise à une constante, et dans ce cas j'ai indiqué le parti que l'on peut tirer de la connaissance de l'invariant J pour le problème de l'intégration.

Revenons au cas où $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ne se réduit pas à une constante. Imaginons que l'on fasse un changement de variables

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

de façon que cette intégrale première devienne $y_n = \text{const.}$ Les équations (2) sont remplacées par un système

$$(2)' \qquad \frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \ldots = \frac{dy_{n-1}}{Y_{n-1}} = \frac{dy_n}{0} = dt$$

pour lequel on a $Y_n = 0$. Quant à l'invariant intégral J, il se change en un invariant intégral J′ du système (2)′

$$J' = \int a_1\, dy_1 + \ldots + a_{n-1}\, dy_{n-1} + a_n\, dy_n,$$

et il est clair que l'intégrale première y_n doit se déduire de l'invariant J′ de la même façon que $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se déduit de J. On aura donc

$$dy_n = \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k b_{1k}\right) dy_1 + \ldots + \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k b_{nk}\right) dy_n, \qquad b_{ik} = \frac{\partial a_i}{\partial y_k} - \frac{\partial a_k}{\partial y_i},$$

et par suite, puisque $Y_n = 0$,

$$(17)\quad \sum_{k=1}^{n-1} Y_k b_{1k} = 0, \qquad \ldots, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} Y_k b_{n-1,k} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} Y_k b_{nk} = 1.$$

Les $n-1$ premières relations expriment, d'après la remarque du n° 5, que l'intégrale double

$$(18)\qquad \int \Sigma\, b_{ik}\, dy_i\, dy_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

est un invariant intégral $I_2^{(d,e)}$ du système

$$\frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \ldots = \frac{dy_{n-1}}{Y_{n-1}} = dt,$$

où l'on considère y_n comme une constante. On a vu dans le premier travail quelles sont les simplifications qui peuvent en résulter pour l'intégration.

La conclusion est en défaut si l'invariant intégral (18) est identiquement nul, ce qui exige que $a_1 dy_1 + \ldots + a_{n-1} dy_{n-1}$ soit la différentielle totale exacte d'une fonction

$$V = \int a_1\, dy_1 + a_2\, dy_2 + \ldots + a_{n-1}\, dy_{n-1}$$

en y regardant toujours y_n comme une constante. Posons

$$W = a_n - \frac{\partial V}{\partial y_n} = a_n - \int \frac{\partial a_1}{\partial y_n} dy_1 + \ldots + \frac{\partial a_{n-1}}{\partial y_n} dy_{n-1};$$

on a

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial a_n}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial a_n}{\partial y_{n-1}}\frac{dy_{n-1}}{dt} - \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_n}\frac{dy_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial a_{n-1}}{\partial y_n}\frac{dy_{n-1}}{dt}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} Y_i \left(\frac{\partial a_n}{\partial y_i} - \frac{\partial a_i}{\partial y_n}\right),$$

et le second membre est égal à l'unité, d'après la dernière des relations (17). On aura donc, dans ce cas, une nouvelle intégrale première renfermant t,

$$(19)\qquad a_n - \int \frac{\partial a_1}{\partial y_n} dy_1 + \ldots + \frac{\partial a_{n-1}}{\partial y_n} dy_{n-1} = t + \text{const.};$$

il en sera ainsi en particulier pour $n = 3$.

9. Revenons au cas où l'on connaît un invariant intégral $I_2^{(d,e)}$ du système (2)

$$(20)\qquad I_2^{(d,e)} = \int \Sigma\, A_{ik}\, dx_i\, dx_k;$$

les n relations

$$(21)\qquad \begin{cases} A_{11}\,dx_1 + A_{12}\,dx_2 + \ldots + A_{1n}\,dx_n = 0, \\ A_{21}\,dx_1 + A_{22}\,dx_2 + \ldots + A_{2n}\,dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{n1}\,dx_1 + A_{n2}\,dx_2 + \ldots + A_{nn}\,dx_n = 0, \end{cases}$$

qui se réduisent à $n-p$ relations distinctes ($p>0$), forment un système complètement intégrable dont toutes les intégrales sont aussi des intégrales du système (2). Si $p>1$, on peut ainsi former un système complet admettant moins de $n-1$ intégrales distinctes qui appartiennent au système (2). Si $p=1$, le système (21) est équivalent au système (2), mais on peut en déduire un multiplicateur.

Supposons $p>1$; les équations (21) admettent $q=n-p$ intégrales distinctes que l'on obtiendra par l'intégration d'un système complet de p équations. Imaginons que l'on fasse un changement de variables $x_i=\varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de façon que $y_1, y_2, \ldots, y_q$ soient précisément ces n intégrales. L'invariant (20) se change en un nouvel invariant de même espèce $I_2^{(de)}$

$$(20)'\qquad I' = \int \Sigma a_{ik}\,dy_i\,dy_k,$$

et le système invariant (21) devient

$$(21)'\qquad \begin{cases} a_{11}\,dy_1 + a_{12}\,dy_2 + \ldots + a_{1n}\,dy_n = 0, \\ a_{21}\,dy_1 + a_{22}\,dy_2 + \ldots + a_{2n}\,dy_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}\,dy_1 + a_{n2}\,dy_2 + \ldots + a_{nn}\,dy_n = 0. \end{cases}$$

Ce système doit être équivalent au système $dy_1=0, \ldots, dy_q=0$; il faut donc que tous les coefficients a_{ik} pour lesquels l'un des indices i ou k est supérieur à q soient nuls. De plus, le système

$$\begin{aligned} &a_{11}\,dy_1 + \ldots + a_{1q}\,dy_q = 0, \\ &a_{21}\,dy_1 + \ldots + a_{2q}\,dy_q = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &a_{q1}\,dy_1 + \ldots + a_{qq}\,dy_q = 0 \end{aligned}$$

doit entraîner les relations $dy_1=0, \ldots, dy_q=0$. Le déterminant de Pfaff doit être différent de zéro, et par suite $q=n-p$ est nécessaire-

ment un nombre pair $2r$, ce qui se déduirait aussi aisément de la théorie du problème de Pfaff. Les conditions

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial y_l} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial y_i} + \frac{\partial a_{li}}{\partial y_k} = 0,$$

qui expriment que $\Sigma a_{ik}\, dy_i\, dy_k$ est un invariant I_2^d montrent en outre que les coefficients a_{ik}, où i et k sont au plus égaux à $2r$, ne dépendent que de $y_1, y_2, \ldots, y_{2r}$. Il est clair que la connaissance d'un tel invariant ne peut être d'aucune utilité pour achever l'intégration du système transformé qui est de la forme

$$\frac{dy_1}{0} = \ldots = \frac{dy_{2r}}{0} = \frac{dy_{2r+1}}{Y_{2r+1}} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n} = dt.$$

Sur le mouvement d'un point matériel, soumis à une force donnée, sur une surface fixe et dépolie;

Par P. WORONETZ,

Professeur à l'Université de Saint-Wladimir, Karawaiewskaïa, 9, à Kieff (Russie).

La Note présente se divise en deux Parties :

Dans la première (n° **1** à n° **8**), nous nous proposons, en employant les coordonnées curvilignes u et v de Gauss, d'obtenir l'équation différentielle de la trajectoire d'un point matériel M, soumis à une force active donnée Φ et contraint à se mouvoir sur une surface donnée S, fixe et dépolie. Dans la seconde Partie (n^{os} **9** et **10**), en supposant que le mouvement du point M, sous l'action de la même force Φ et sur la même surface S, mais dépourvue de frottement (mouvement non troublé), soit donné, nous considérons les constantes d'intégration du problème non troublé comme variables dans le problème troublé (mouvement de M sur S avec frottement) et nous développons les équations différentielles qui définissent ces nouvelles variables en fonction du temps t.

I.

1. Soient les équations de la surface donnée S

$$x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v),$$

x, y, z désignant les coordonnées rectangulaires d'un point de S; soient E, F, G; D, D′, D″ les coefficients des deux formes quadratiques fondamentales de la surface S, de sorte que l'arc ds d'une courbe C

tracée sur S, les composantes de la courbure $\frac{1}{\rho}$ de C suivant la normale n de S et suivant la direction p orthogonale à n et à ds, s'expriment par les formules

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & ds^2 = (E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2)\,du^2, \\ & \frac{\cos(\rho, n)}{\rho} = \frac{1}{R} = \frac{D + 2D'\dot{v} + D''\dot{v}^2}{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^3}, \\ & \frac{\cos(\rho, p)}{\rho} = \frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{H}\left(\frac{d}{du}\frac{F + G\dot{v}}{\sqrt{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2}} - \frac{\frac{\partial E}{\partial v} + 2\frac{\partial F}{\partial v}\dot{v} + \frac{\partial G}{\partial v}\dot{v}^2}{2\sqrt{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2}}\right), \\ & H = +\sqrt{EG - F^2}; \end{aligned}\right.$$

où $\dot{v}$ est la dérivée de v par rapport à u, $\frac{1}{R}$ la courbure de la section normale de S tangente à la courbe C, $\frac{1}{\Gamma}$ la courbure géodésique de cette courbe C. La normale n est dirigée par rapport aux courbes $u(v = \text{const.})$ et $v(u = \text{const.})$, comme l'axe Oz l'est par rapport aux axes Ox et Oy; la perpendiculaire p par rapport à ds et à n est dirigée comme l'axe Oy par rapport aux axes Ox et Oz, de sorte qu'on a, comme il est facile de l'établir,

$$(2)\quad H\,ds\cos(p, x) = \left[E\frac{\partial x}{\partial v} - F\frac{\partial x}{\partial u} + \left(F\frac{\partial x}{\partial v} - G\frac{\partial x}{\partial u}\right)\dot{v}\right]du, \qquad \ldots.$$

Nous supposerons, en outre, que la direction de la normale n coïncide avec celle dans laquelle le point matériel M peut quitter la surface, ce qu'on peut obtenir toujours en choisissant convenablement les désignations u et v pour les courbes coordonnées de la surface S. Ainsi la réaction normale N de la surface sera toujours dirigée suivant la direction de n.

La direction positive de l'arc s coïncidera avec celle de la vitesse w du point M à l'instant considéré. La projection de la force Φ sur une direction quelconque ω sera désignée par Φ_ω.

Quant à la force de frottement, nous acceptons l'hypothèse habituelle : cette force a la direction opposée à la vitesse w de M et sa grandeur est proportionnelle à la réaction normale N de la surface ; le coefficient de frottement sera désigné par f.

Le problème du mouvement d'un point M sur une surface donnée S

se résout, comme on sait, par l'intégration de deux équations du second ordre qui définissent les coordonnées curvilignes u et v en fonction du temps t. Quand la force Φ, comme nous supposerons, ne dépend que de la position de M sur S, on peut encore éliminer dt entre ces équations, et l'on obtient alors l'équation de la trajectoire de M sous la forme

$$\psi(u, v, \dot{v}, \ddot{v}, \dddot{v}) = 0, \tag{3}$$

où le nombre des points sur v indique l'ordre de la dérivée correspondante.

Nous allons déduire maintenant cette équation.

2. La projection de l'accélération du point M sur la direction de ρ est évidemment égale à

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{2\mathfrak{T}}{m\rho},$$

$\mathfrak{T}$ et m désignant la demi-force vive et la masse du point M; par conséquent, en projetant l'accélération du point M sur les directions n et p, et en considérant les équations (1), on obtient, selon la deuxième loi de Newton, les deux équations suivantes (équations intrinsèques) :

$$\frac{2\mathfrak{T}}{R} = \Phi_n + N, \qquad \frac{2\mathfrak{T}}{\Gamma} = \Phi_p. \tag{4}$$

Si l'on tire de ces équations les valeurs de $\mathfrak{T}$ et de N,

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\Gamma\Phi_p, \qquad N = \frac{\Gamma}{R}\Phi_p - \Phi_n, \tag{5}$$

on peut donner au théorème des forces vives

$$d\mathfrak{T} = (\Phi_s - fN)\,ds \tag{6}$$

la forme suivante :

$$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{2}\Gamma\Phi_p\right) = \left(\Phi_s - f\frac{\Gamma}{R}\Phi_p + f\Phi_n\right)\sqrt{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2}. \tag{7}$$

Le radical prend le signe $+$, quand u croît avec le temps, et le signe $-$ dans le cas opposé.

En y substituant les valeurs de R et Γ tirées des équations (1), nous parvenons à l'équation cherchée (3) de la trajectoire du point M.

Lorsqu'il existe une fonction de forces $U(u, v)$, on trouve, au moyen des équations (2),

$$\Phi_s\, ds = dU, \qquad H\Phi_p\, ds = \left[E\frac{\partial U}{\partial v} - F\frac{\partial U}{\partial u} + \left(F\frac{\partial U}{\partial v} - G\frac{\partial U}{\partial u}\right)\dot{v}\right] du,$$

et l'équation (7) peut être remplacée par la suivante :

$$(8)\quad \frac{d}{du}\left[\frac{\Gamma}{2H}\,\frac{E\frac{\partial U}{\partial v} - F\frac{\partial U}{\partial u} + \left(F\frac{\partial U}{\partial v} - G\frac{\partial U}{\partial u}\right)\dot{v}}{\sqrt{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2}}\right]$$
$$= \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial v}\dot{v} - \frac{f}{H}\frac{\Gamma}{R}$$
$$\times\left[E\frac{\partial U}{\partial v} - F\frac{\partial U}{\partial u} + \left(F\frac{\partial U}{\partial v} - G\frac{\partial U}{\partial u}\right)\dot{v}\right] + f\Phi_n\sqrt{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2}.$$

Après avoir intégré l'équation (7) ou (8), c'est-à-dire après avoir déterminé v en fonction de u et de trois constantes arbitraires, on trouve le temps t par une quadrature

$$(9)\qquad t - t_0 = \sqrt{m}\int \frac{\sqrt{E + 2Fv + G\dot{v}^2}}{\sqrt{\Gamma\Phi_p}}\, du,$$

t_0 désignant la quatrième et dernière constante.

Cette formule est déduite de la première équation (5) par la substitution

$$(10)\qquad 2\mathfrak{T} = m\frac{ds^2}{dt^2}.$$

Il faut encore remarquer que le mouvement du point M sur la surface S n'est possible que quand on a [formule (5)]

$$(11)\qquad N = \frac{\Gamma}{R}\Phi_p - \Phi_n \geq 0.$$

II.

5. Avant de faire quelques applications des formules obtenues, nous allons discuter un cas spécial qui doit être traité particulièrement.

C'est, d'après M. P. Painlevé [1], le cas des trajectoires remarquables pour le problème en question.

Supposons que la surface S et la force Φ soient données d'une telle manière que les équations

$$(12) \qquad \frac{1}{\Gamma} = 0, \qquad \Phi_p = 0$$

puissent être satisfaites simultanément. La deuxième des équations (4) sera alors satisfaite, mais évidemment on ne peut pas obtenir la solution indiquée, en employant l'équation (7) de la trajectoire.

Il résulte de la première des formules (12) que le point M décrit sur la surface S une ligne géodésique. Cette courbe étant donnée par les équations

$$u = \varphi_1(s), \qquad v = \varphi_2(s),$$

il reste encore à exprimer le temps t en fonction de s. Pour obtenir cela nous éliminons N entre les équations (4) et (6) :

$$d\mathfrak{T} + 2f\frac{ds}{R}\mathfrak{T} = (\Phi_s + f\Phi_n)\,ds;$$

par conséquent, on a

$$\mathfrak{T} = \left[\int (\Phi_s + f\Phi_n)\, e^{2f\int\frac{ds}{R}}\, ds + \text{const.}\right] e^{-2f\int\frac{ds}{R}} = \mathfrak{T}(s).$$

En employant maintenant la formule (10), on obtient définitivement

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{ds}{\mathfrak{T}(s)} + \text{const.}$$

Le mouvement, en vertu de l'équation (4), n'est possible que si l'on a

$$(13) \qquad N = \frac{2\mathfrak{T}}{R} - \Phi_n \geq 0.$$

4. Soit, par exemple, S la surface d'Enneper :

$$x = 3u + 3uv^2 - u^3, \qquad y = 3v + 3u^2v - v^3, \qquad z = 3u^2 - 3v^2;$$

$$E = G = 9(1 + u^2 + v^2)^2, \qquad F = 0; \qquad D = 6, \qquad D' = 0, \qquad D'' = -6;$$

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{3(1 + u^2 + v^2)^2}\,\frac{1 - \dot{v}^2}{1 + \dot{v}^2}, \qquad \frac{1}{\Gamma} = \frac{(1 + u^2 + v^2)\ddot{v} + 2(u\dot{v} - v)(1 + \dot{v}^2)}{3(1 + u^2 + v^2)^2(1 + \dot{v}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

---

[1] P. Painlevé, *Sur les mouvements et les trajectoires réels des systèmes* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXII, 1894).

Soit Φ la résultante de deux forces : l'une, répulsive de l'origine O des coordonnées rectangulaires, proportionnelle à la distance; l'autre, répulsive du plan Oxy, aussi proportionnelle à la distance :

$$\Phi_x = \varepsilon^2 x, \qquad \Phi_y = \varepsilon^2 y, \qquad \Phi_z = \varepsilon^2 z + \varepsilon_1^2 z.$$

Soit

$$\varepsilon_1^2 = \frac{1}{3}\varepsilon^2,$$

on trouve alors

$$\Phi_n = -2\varepsilon^2(u^2 - v^2), \qquad \Phi_p = \frac{\varepsilon^2(u^2 + v^2 + 3)(v - u\dot{v})}{\sqrt{1 + \dot{v}^2}}.$$

Les conditions (12) sont donc remplies, si l'on a

$$v = cu,$$

c désignant une constante arbitraire.

Cette équation détermine un système de lignes géodésiques qui passent par l'origine O et qui coupent toutes les lignes de courbure u sous un angle constant i, égal à arc tang c.

La formule (13) donne

$$N = 2(1 - c^2)\left(3m\frac{du^2}{dt^2} + \varepsilon^2 u^2\right).$$

Le mouvement sur la surface S n'est donc possible que lorsqu'on a

$$c \leqq 1,$$

c'est-à-dire lorsque la trajectoire se trouve au-dessus du plan Oxy.

5. Le problème précédent pourrait être généralisé. La force active Φ étant donnée, nous nous proposons de trouver l'équation la plus générale d'une surface sur laquelle un point matériel, sollicité par la force donnée, peut se mouvoir suivant les formules (12). Soit Φ la force de la pesanteur.

Cherchons l'équation de la surface sous la forme

$$z = \text{fonct.}(x, y),$$

en prenant l'axe Oz dirigé verticalement.

On peut alors formuler ainsi le problème posé : Il faut trouver une surface sur laquelle existe une ligne géodésique telle que la direction p, pour tous les points de cette ligne, soit perpendiculaire à Oz.

La direction p étant normale à ds et à n, on a, pour chaque point de la courbe cherchée,

$$\frac{dx}{ds}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{dy}{ds}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Or, pour pouvoir nous servir de la condition qui exige que la courbe cherchée doit être une ligne géodésique, différentions l'équation précédente :

$$\frac{d^2x}{ds^2}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{d^2y}{ds^2}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{dx}{ds}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{dy}{ds}\right) - \frac{dy}{ds}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{ds}\right) = 0,$$

remarquons qu'on a pour une ligne géodésique

$$\frac{d^2x}{ds^2}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{d^2y}{ds^2}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

et éliminons les dérivées de x et y par rapport à s.

Nous parvenons de cette manière à l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

qui définit la surface cherchée.

L'intégration de cette équation ne présente pas de difficultés, et nous obtenons l'intégrale générale sous la forme

$$x\sin\omega + y\cos\omega + \varphi(\omega) + \psi(z) = 0,$$

où φ et ψ désignent des fonctions arbitraires et où le paramètre ω doit être éliminé à l'aide de l'équation

$$x\cos\omega - y\sin\omega + \frac{d\varphi}{d\omega} = 0.$$

III.

6. Dans le problème du mouvement d'un point matériel sur une surface donnée, fixe et polie, l'intégration des équations du mouvement se ramène, comme on sait, à des quadratures, quand une des coordonnées curvilignes, par exemple v, est cyclique, c'est-à-dire quand la fonction de forces U et les coefficients E, F, ..., D″ de la surface ne renferment pas explicitement cette coordonnée v.

Appliquons à ce cas l'équation (8) de la trajectoire sur une surface dépolie. Cette équation, quand v est cyclique, devient l'équation différentielle du second ordre par rapport à $\dot{v}$:

$$(14)\qquad \frac{d}{du}\left(\frac{\Gamma}{2H}\frac{F+Gv}{\sqrt{E+2F\dot{v}+G\dot{v}^2}}\dot{U}\right)$$
$$+\dot{U}+f\frac{\Gamma}{HR}(F+G\dot{v})\dot{U}+f\Phi_n\sqrt{E+2F\dot{v}+Gv^2}=0.$$

En posant

$$(15)\qquad \eta=\frac{F+G\dot{v}}{\sqrt{E+2F\dot{v}+Gv^2}},$$

nous obtenons, à l'aide des formules (1), l'équation

$$(16)\qquad \dot{\eta}\ddot{\eta}=\frac{\ddot{U}}{\dot{U}}\eta\dot{\eta}+3\dot{\eta}^2+2f\frac{H}{\sqrt{G-\eta^2}}\left(\frac{1}{\overline{R}}\eta\dot{\eta}+\frac{\Phi_n}{\dot{U}}\dot{\eta}^2\right),$$

où $\overline{R}$ désigne la valeur de R, exprimée en fonction de u et η :

$$(17)\ \frac{1}{\overline{R}}=\frac{DG-FD'}{H^2G}(G-\eta^2)+\frac{D''}{G^2}\eta^2+\frac{D'G-D''F}{G^2H^2}\left(2H\eta-F\sqrt{G-\eta^2}\right)\sqrt{G-\eta^2}.$$

7. Par exemple, pour l'hélicoïde gauche à plan directeur nous avons

$$x=u\cos v,\qquad y=u\sin v,\qquad z=hv;$$

$$E=1,\qquad F=0,\qquad G=u^2+h^2;\qquad D=0,\qquad D'=-\frac{h}{\sqrt{u^2+h^2}},\qquad D''=0.$$

Soit le point M repoussé par l'axe de l'hélicoïde avec une force inversement proportionnelle au cube de la distance :

$$U=-\frac{\varepsilon^2}{2u^2},\qquad \Phi_n=0.$$

L'équation (16) donne, en vertu de la formule (17),

$$\dot{\eta}\ddot{\eta}=-\frac{3}{u}\eta\dot{\eta}+3\dot{\eta}^2-\frac{4hf}{(u^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\eta^2\dot{\eta}.$$

Contentons-nous de considérer une solution particulière. L'équation précédente admet, comme on le voit immédiatement, l'intégrale parti-

culière

$$\eta = -\frac{h}{f}\frac{\sqrt{u^2+h^2}}{u}.$$

Écrivons cette équation, suivant la formule (15), sous la forme

$$u\frac{\sqrt{u^2+h^2}\,\dot{v}}{\sqrt{1+(u^2+h^2)\dot{v}^2}} = -\frac{h}{f};$$

il en résulte

$$u\sin\varphi = -\frac{h}{f} = \text{const.},$$

φ désignant l'angle sous lequel la trajectoire coupe les génératrices rectilignes de la surface.

La solution analytique s'exprime en fonctions elliptiques.

L'équation de la trajectoire est

$$u\cos\operatorname{am}\left(\frac{v_1 - v}{\sqrt{1-k^2}}\right) = \frac{h}{k}\sqrt{1-k^2},$$

où le module k est défini par la formule

$$k^2 = \frac{f^2}{1+f^2}$$

et où v_1 désigne une constante qui est égale à la valeur de v pour $u = h : f$.

La formule (9) devient

$$\frac{\varepsilon}{h}(t-t_1) = \int_{\frac{h}{f}}^{u}\frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2+h^2}\sqrt{u^2-\frac{h^2}{f^2}}},$$

t_1 désignant la valeur de t pour $u = h : f$.

En posant

$$u = \frac{h}{f\cos\varphi},$$

on a

$$\frac{k}{1+k^2}\frac{\varepsilon}{h^2}(t-t_1) = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \Pi(\varphi, -1, k).$$

Le mouvement sur la surface est admissible, parce que, d'après la

formule (11), nous avons

$$N = \frac{2\varepsilon^2}{f} \frac{\sqrt{u^2 - \frac{h^2}{f^2}}}{u^4} > 0.$$

8. On peut aussi se servir de l'équation (16) de la trajectoire pour le problème inverse de la Dynamique. Cherchons, par exemple, une surface de révolution :

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = z(u);$$

$$E = 1 + \dot{z}^2, \quad F = 0, \quad G = u^2; \quad D = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{1+\dot{z}^2}}, \quad D' = 0, \quad D'' = \frac{u\dot{z}}{\sqrt{1+\dot{z}^2}},$$

telle qu'un point pesant

$$U = mgz, \qquad \Phi_n = \frac{mg}{\sqrt{1+\dot{z}^2}},$$

en glissant sur elle, puisse décrire une courbe loxodromique

$$\eta = u\sin i,$$

c'est-à-dire une courbe qui coupe les méridiens sous un angle constant i.

En remplaçant, dans la formule (16), η par sa valeur $u\sin i$, on obtient l'équation

$$(u\ddot{z} + 3\dot{z})\cos i + 2f\left[1 + \dot{z}^2 + \left(\frac{u\ddot{z}}{1+\dot{z}^2} - \dot{z}\right)\dot{z}\cos^2 i\right] = 0$$

qui définit z en fonction de u et, par conséquent, qui détermine la surface cherchée.

Évidemment l'intégration de cette équation se ramène à des quadratures.

IV.

9. Procédons maintenant au développement de la seconde méthode indiquée dans la Préface.

En désignant par u' et v' les dérivées de u et v par rapport au temps t

et par $\mathfrak{T}$ la demi-force vive du point M :

$$\mathfrak{T} = \frac{m v^2}{2} = \frac{m}{2}(\mathrm{E}u'^2 + 2\mathrm{F}u'v' + \mathrm{G}v'^2),$$

écrivons les équations de Lagrange pour le mouvement du point M sur la surface S :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u'}\right) - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u} = \mathrm{Q}_u, \qquad \ldots.$$

Pour obtenir Q_u on imprimera au point M un déplacement virtuel de δs_u obtenu en laissant t et v constants et faisant varier seulement u de δu; le travail virtuel des forces qui agissent sur M sera $\mathrm{Q}_u \delta u$. S'il existe une fonction des forces $\mathrm{U}(u, v)$, ce travail virtuel de la force Φ sera égal à $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}\delta u$; quant à la force de frottement, on calcule son travail virtuel de la manière suivante :

$$-f\mathrm{N}\cos(w, u)\,\delta s_u = -f\mathrm{N}\frac{\sqrt{\mathrm{E}}\,u' + \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{E}}}v'}{\sqrt{\mathrm{E}u'^2 + 2\mathrm{F}u'v' + \mathrm{G}v'^2}}\sqrt{\mathrm{E}}\,\delta u.$$

On a donc

$$\mathrm{Q}_u = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u} - f\mathrm{N}\frac{\mathrm{E}u' + \mathrm{F}v'}{\sqrt{\mathrm{E}u'^2 + 2\mathrm{F}u'v' + \mathrm{G}v'^2}}.$$

En remplaçant N par sa valeur tirée de la formule (4) et en tenant compte des formules (1), on obtient les équations de Lagrange qui définissent u et v en fonction de t sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}&\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u'}\right) - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u}\\ &= \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u} - mf\left(\mathrm{D}u'^2 + 2\mathrm{D}'u'v' + \mathrm{D}''v'^2 - \frac{1}{m}\Phi_n\right)\frac{\mathrm{E}u' + \mathrm{F}v'}{\sqrt{\mathrm{E}u'^2 + 2\mathrm{F}u'v' + \mathrm{G}v'^2}},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Introduisons alors les variables p et q par les formules

$$p = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u'}, \qquad q = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial v'}.$$

Au moyen d'une transformation bien connue, nous aurons les équations

d'Hamilton

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial T}{\partial p}, & \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial T}{\partial u} + \dfrac{\partial U}{\partial u} - f S p, \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial T}{\partial q}, & \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{\partial T}{\partial v} + \dfrac{\partial U}{\partial v} - f S q, \end{cases}$$

où il est posé

$$T = \frac{1}{2mH^2}(Gp^2 - 2Fpq + Eq^2),$$

$$S = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2T}}\left[D\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2 + 2D'\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial q} + D''\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)^2 - \frac{1}{m}\Phi_n\right].$$

Ces équations définissent les variables u, v, p, q en fonction de t et de quatre constantes arbitraires.

Or, d'après Jacobi, prenons l'équation différentielle partielle d'Hamilton et de Jacobi pour le mouvement non troublé, c'est-à-dire pour le mouvement du point M, sous l'action de la même force Φ et sur la même surface S, mais sans frottement ($f = 0$). Cette équation est

$$T = \frac{1}{2mH^2}\left[G\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial v} + E\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2\right] = U(u, v) + a,$$

a désignant une constante arbitraire.

Soit l'intégrale complète de cette équation

$$W(u, v, a, b) + \text{const.},$$

b désignant une autre constante arbitraire. Remplaçons dans les équations du mouvement (18) les variables u, v, p, q par les variables a, b, α, β déterminées par les équations

$$(19)\qquad p = \frac{\partial W}{\partial u}, \qquad q = \frac{\partial W}{\partial v}, \qquad \alpha + t = \frac{\partial W}{\partial a}, \qquad \beta = \frac{\partial W}{\partial b}.$$

Pour y parvenir, différentions les formules précédentes, en ayant égard aux équations (18) :

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial u} - f S p - \frac{\partial^2 W}{\partial u^2}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial b}\frac{db}{dt},$$

. . . . . .

et remarquons, par la définition de la fonction W, que l'on a

$$\frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial U}{\partial u}, \qquad \ldots.$$

Donc nous parvenons aux équations

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial b}\frac{db}{dt} = -fS\frac{\partial W}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial a^2}\frac{da}{dt} + \frac{\partial^2 W}{\partial a\,\partial b}\frac{db}{dt} = \frac{d\alpha}{dt},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial v\,\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial^2 W}{\partial v\,\partial b}\frac{db}{dt} = -fS\frac{\partial W}{\partial v}, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial a\,\partial b}\frac{da}{dt} + \frac{\partial^2 W}{\partial b^2}\frac{db}{dt} = \frac{d\beta}{dt}.$$

Or, lorsqu'on tire des équations (19) les variables u et v :

$$u = \bar{u}(a, b, \alpha + t, \beta), \qquad v = \bar{v}(a, b, \alpha + t, \beta),$$

de sorte qu'on a

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial a}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 W}{\partial v\,\partial a}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \alpha} = 1, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial b}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 W}{\partial v\,\partial b}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \alpha} = 0, \qquad \ldots,$$

les formules obtenues nous donnent

$$\frac{da}{dt} = -fS\left(\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha} + \frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \alpha}\right), \qquad \ldots$$

ou définitivement

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{da}{dt} = -f\bar{S}\dfrac{\partial \overline{W}}{\partial \alpha}, & \dfrac{d\alpha}{dt} = f\bar{S}\left(\dfrac{\partial \overline{W}}{\partial a} - \alpha - t\right), \\[2ex] \dfrac{db}{dt} = -f\bar{S}\dfrac{\partial \overline{W}}{\partial \beta}, & \dfrac{d\beta}{dt} = f\bar{S}\left(\dfrac{\partial \overline{W}}{\partial b} - \beta\right), \end{cases}$$

$\bar{S}$ et $\overline{W}$ désignant les fonctions S et W exprimées, à l'aide des formules (19), en fonction de a, b, $\alpha + t$, β.

Les équations précédentes définissent les variables a, b, α, β en fonction de t et de quatre constantes arbitraires.

10. Soit, par exemple, S un cône de révolution :

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = u\cot i;$$

$$E = \frac{1}{\sin^2 i}, \qquad F = 0, \qquad G = u^2; \qquad D = 0, \qquad D' = 0, \qquad D'' = u\cos i.$$

Soit le point M repoussé par l'axe du cône avec une force inversement

proportionnelle au cube de la distance :

$$U = -\frac{\varepsilon^2}{2u^2}, \qquad \Phi_n = -\frac{\varepsilon^2}{u^3}\cos i.$$

Supposons la masse du point M égale à l'unité. L'équation différentielle partielle d'Hamilton et de Jacobi, pour le mouvement non troublé du point M, sera

$$\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 \sin^2 i + \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2 = 2a - \frac{\varepsilon^2}{u^2}$$

et l'intégrale complète

$$W = bv + \frac{1}{\sin i}\int\sqrt{2a - \frac{\varepsilon^2 + b^2}{u^2}}\,du.$$

Les formules (19) nous donnent donc

$$p = \frac{1}{\sin i}\sqrt{2a - \frac{\varepsilon^2 + b^2}{u^2}}, \qquad \alpha + t = \frac{1}{\sin i}\int\frac{du}{\sqrt{2a - \frac{\varepsilon^2 + b^2}{u^2}}},$$

$$q = b, \qquad \beta = v - \frac{b}{\sin i}\int\frac{1}{\sqrt{2a - \frac{\varepsilon^2 + b^2}{u^2}}}\frac{du}{u^2}.$$

Nous calculons ensuite les fonctions $\overline{W}$ et $\overline{S}$ et nous trouvons

$$\overline{W} = b\beta + 2a(\alpha + t) - \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + b^2}\sin i}\operatorname{arc\,tang}\frac{2a(\alpha + t)\sin i}{\sqrt{\varepsilon^2 + b^2}},$$

$$\overline{S} = \frac{2a(b^2 - \varepsilon^2)\cos i}{[4a^2(\alpha + t)^2\sin^2 i + \varepsilon^2 + b^2]\sqrt{4a^2(\alpha + t)^2\sin^2 i + b^2}}.$$

On remarque que $\overline{W}$ et $\overline{S}$ ne contiennent la variable α que dans la combinaison $a(\alpha + t)$. Introduisons donc, au lieu de α, une nouvelle variable

$$\gamma = a(\alpha + t)$$

et remplaçons les équations (20) par les suivantes

$$\frac{da}{dt} = fS_1\frac{\partial W_1}{\partial \gamma}a, \qquad \frac{db}{dt} = fS_1 b,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -fS_1\gamma + a, \qquad \frac{d\beta}{dt} = fS_1\left(\frac{\partial W_1}{\partial b} - \beta\right),$$

où S_1 et W_1 désignent les fonctions $\overline{S}$ et $\overline{W}$ exprimées en fonction de a, b, γ, β :

$$W_1 = b\beta + 2\gamma - \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + b^2}\sin i} \operatorname{arc\,tang} \frac{2\gamma \sin i}{\sqrt{\varepsilon^2 + b^2}},$$

$$S_1 = \frac{2a(b^2 + \varepsilon^2)\cos i}{(4\gamma^2 \sin^2 i + \varepsilon^2 + b^2)\sqrt{4\gamma^2 \sin^2 i + b^2}}.$$

Évidemment l'intégration de ces équations se ramène à des quadratures, si l'on a obtenu γ en fonction de b, c'est-à-dire si l'on a intégré l'équation

$$\frac{d\gamma}{db} = \frac{\gamma}{b} - \frac{4\gamma^2 \sin^2 i + \varepsilon^2 + b^2}{2fb(b^2 + \varepsilon^2)\cos i}\sqrt{4\gamma^2 \sin^2 i + b^2};$$

en posant

$$2\gamma \sin i = \frac{b\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}, \qquad b^2 + \varepsilon^2 = \xi,$$

on aura

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\operatorname{tang} i}{2f}\,\frac{\xi - \varepsilon^2\eta^2}{\xi(\xi - \varepsilon^2)};$$

c'est une équation de Riccati. Pour la remplacer par une équation linéaire du second ordre changeons les variables :

$$\eta = \frac{2f}{\operatorname{tang} i}\,\frac{\xi_1 - 1}{\xi_1} + \frac{2f}{\operatorname{tang} i}\,\frac{\xi_1 - 1}{\eta_1}\,\frac{d\eta_1}{d\xi_1}, \qquad \xi = \varepsilon^2\left(1 - \frac{1}{\xi_1}\right)$$

et nous parvenons à l'équation

$$\xi_1(1 - \xi_1)\frac{d^2\eta_1}{d\xi_1^2} + (2 - 3\xi_1)\frac{d\eta_1}{d\xi_1} - \left(1 - \frac{\operatorname{tang}^2 i}{4f^2}\right)\eta_1 = 0;$$

d'où l'on conclut que la solution générale du problème posé s'exprime en fonctions hypergéométriques de Gauss.

Comment le débit d'un tuyau de conduite affecté d'un rétrécissement notable mais graduel, peut se déduire de l'abaissement de pression qui s'y produit le long de la partie rétrécie;

PAR J. BOUSSINESQ.

1. On sait, depuis les observations de l'ingénieur américain Clémens Herschell, confirmées par d'autres, récentes, de MM. Camichel, Eydoux et Lhériaud [1], que le débit q d'une conduite se déduit très simplement, à des erreurs relatives près n'atteignant pas 1 centième, de la différence $P_1 - P_2$ des deux pressions, P_1, P_2, qui s'y trouvent exercées, le long de l'axe supposé horizontal, dans la première section amont, σ_1, et dans la section la plus rétrécie, σ_2, d'un *venturi*, ensemble d'un rétrécissement notable, mais assez allongé ou bien graduel, et d'un élargissement analogue qui s'y raccorde en lui faisant suite, c'est-à-dire sans brusque déviation ni courbure sensible des filets fluides. La formule qu'on y applique est celle que donne, pour chaque filet, le principe de D. Bernoulli sur la conservation de la charge dans l'hypothèse de fluidité parfaite, mais en n'y distinguant pas les vitesses individuelles V des divers filets, à la traversée d'une section normale σ quelconque, d'avec la vitesse moyenne ou *de débit* U à travers la même section. Et, cependant, le régime d'écoulement étant à peu près uniforme à l'entrée du venturi, c'est-à-dire sur la première section amont σ_1 où P_1 désigne la pression sur l'axe (évaluée en hauteur d'eau), on sait que des différences très appréciables de vitesse y

[1] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 160, 4 janvier 1915, p. 28.

existent entre le filet central ou *axial*, le plus rapide, et ceux de la périphérie, quoique ces différences s'atténuent à mesure qu'on approche de la section rétrécie σ_2, où la pression analogue, sur l'axe, est P_2.

Il y a donc quelque chose de paradoxal à ce fait, que l'hypothèse de l'égalité de vitesse des filets fournisse un débit q pratiquement exact.

Je me propose ici de montrer que le paradoxe s'explique par deux petites erreurs de sens contraires, commises dans le calcul : l'une, évidente (du moins au sentiment), qui, pour l'excédent $P_1 - P_2$ de pression constaté le long du rétrécissement, fait obtenir un débit trop fort, et qui consiste en ce qu'on néglige les frottements, les imperfections effectives de fluidité de l'eau; l'autre, plus cachée, tenant à ce que, pour un liquide parfait, un calcul exact, avec mise en compte de l'inégalité de vitesse des filets, donnerait un débit supérieur au débit théorique approché obtenu. C'est justement la formule de ce débit supérieur, concernant un liquide hypothétique parfait, que l'analyse suivante a pour but de faire connaître.

II. Le rétrécissement étant supposé assez graduel pour n'imprimer aux filets fluides ni courbures sensibles, ni même inclinaisons mutuelles appréciables, on sait que la pression p variera *hydrostatiquement* sur toute l'étendue de chaque section normale σ, ou que la somme de la pression p et de l'altitude $\mathfrak{z}$ au-dessus du plan horizontal de l'axe, y égalera simplement la pression P sur l'axe. Ainsi, la *hauteur totale de charge* $\frac{V^2}{2g} + p + \mathfrak{z}$ de chaque filet fluide, constante le long du filet, y sera simplement $\frac{V^2}{2g} + P$.

On aura donc, pour un filet quelconque, en le considérant sur la section d'amont σ_1 et sur toute autre section normale σ,

$$\frac{V^2}{2g} + P = \frac{V_1^2}{2g} + P_1. \tag{1}$$

Multiplions par le débit constant dq du filet, qu'exprime le produit $V\,d\sigma$ sur la section σ et le produit $V_1\,d\sigma_1$ sur la section σ_1, puis faisons la somme des résultats pour tous les filets, et divisons par le débit

total $q = U\sigma = U_1\sigma_1$. Il vient, identiquement,

$$\frac{U^2}{2g}\int\left(\frac{V}{U}\right)^3\frac{d\sigma}{\sigma} + P = \frac{U_1^2}{2g}\int\left(\frac{V_1}{U_1}\right)^3\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} + P_1.$$

Les hydrauliciens appellent α l'intégrale $\int\left(\frac{V}{U}\right)^3\frac{d\sigma}{\sigma}$, *cube moyen*, à travers la section σ, du rapport de la vitesse V des divers filets fluides à la vitesse moyenne U : ils lui attribuent ordinairement la valeur *approximative* 1,1 dans les conduites circulaires à régime uniforme. Et ils écrivent, par suite, l'équation ci-dessus, expression du principe de D. Bernoulli pour *tout* le courant liquide à axe horizontal, $\alpha\frac{U^2}{2g} + P = \text{const}$. En l'appliquant aux deux sections σ_1, σ_2 et désignant par α_1, α_2 les deux valeurs correspondantes de α, on aura donc

$$(2)\qquad \alpha_2\frac{U_2^2}{2g} + P_2 = \alpha_1\frac{U_1^2}{2g} + P_1.$$

Remplaçons-y les vitesses de débit U_2, U_1 par les quotients équivalents $\frac{q}{\sigma_2}$, $\frac{q}{\sigma_1}$. Puis isolons la valeur de q; et nous aurons, dans l'hypothèse de la fluidité parfaite, l'expression théorique du débit q :

$$(3)\qquad q = \sqrt{2g(P_1 - P_2)}\,\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\alpha_2\sigma_1^2 - \alpha_1\sigma_2^2}}.$$

Négliger l'inégalité de vitesse des filets fluides, c'est faire $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, ou prendre

$$(3\,bis)\qquad q = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}}\sqrt{2g(P_1 - P_2)};$$

de sorte que le coefficient correctif, λ, par lequel il faut multiplier l'expression ainsi simplifiée (3 *bis*) du débit, pour en avoir la vraie expression théorique, est

$$(4)\qquad \lambda = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\alpha_2\sigma_1^2} - \frac{\sigma_2^2}{\alpha_1\sigma_2^2}}.$$

Tel est donc le coefficient dont nous aurons à apprécier ici la différence d'avec l'unité.

III. Introduisons-y la valeur donnée, que nous appellerons μ, du *rétrécissement*, c'est-à-dire le rapport $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$: pratiquement, ce sera une fraction assez petite, comme, par exemple, $\frac{1}{4}$ si le diamètre de la conduite s'y réduit *de moitié*. Le carré du coefficient correctif λ deviendra

$$\lambda^2 = \frac{1-\mu^2}{\alpha_2 - \mu^2 \alpha_1}. \tag{5}$$

Cela posé, la formule (1), en y spécifiant le premier membre pour la section rétrécie σ_2, où $V = V_2$ et $U = U_2$, donnera, sur un filet fluide quelconque,

$$V_2^2 - V_1^2 = 2g(P_1 - P_2),$$

équation où V_1, V_2 seront comparables respectivement à leurs moyennes U_1, U_2, c'est-à-dire dans un rapport de l'ordre de petitesse de $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \mu$. V_1^2 sera donc une assez petite fraction du second membre; et l'on aura

$$V_2 = \sqrt{2g(P_1 - P_2)}\left[1 + \frac{V_1^2}{2g(P_1 - P_2)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

où la puissance $\frac{1}{2}$ de la quantité entre crochets pourra se développer, par la formule du binome, en une série rapidement convergente.

Exprimons-y la vitesse V_1 du filet sur la section σ_1 d'amont où le régime est à peu près uniforme, en fonction de la vitesse moyenne correspondante U_1 et du rapport $\frac{V_1}{U_1}$, qui sera une certaine fonction φ des deux coordonnées *transversales* différant modérément de sa valeur moyenne 1. Si nous appelons ε l'écart $\varphi - 1$ de cette fonction d'avec l'unité, le carré ε^2 sera un peu sensible, d'une valeur moyenne $\int \varepsilon^2 \frac{d\sigma_1}{\sigma_1}$ qui atteint quelques centièmes; mais son cube ε^3 sera généralement négligeable et, se trouvant positif au centre de la section, négatif à la périphérie, aura sa valeur moyenne, $\int \varepsilon^3 \frac{d\sigma_1}{\sigma_1}$, encore plus insensible.

Faisons ainsi, dans le second membre de (6), $V_1 = U_1 \varphi$ et substituons-y de plus à U_1 le produit, évidemment équivalent, de la vitesse

moyenne U_2 sur la section σ_2 par le rapport inverse μ des deux sections. Enfin posons, pour abréger,

$$(7) \qquad \frac{U_2^2}{2g(P_1 - P_2)} = \zeta.$$

La formule (6) deviendra, en y négligeant finalement une partie de l'ordre de petitesse de $\frac{\mu^6}{16}$,

$$(8) \quad V_2 = \sqrt{2g(P_1 - P_2)}\,(1 + \zeta\mu^2\varphi^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2g(P_1 - P_2)}\left(1 + \frac{\zeta\mu^2}{2}\varphi^2 - \frac{\zeta^2\mu^4}{8}\varphi^4\right),$$

Il en résulte, en multipliant par $\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}$ et intégrant dans toute la section rétrécie σ_2, une expression de la vitesse moyenne U_2 à travers cette section, savoir

$$(9) \qquad U_2 = \sqrt{2g(P_1 - P_2)}\left(1 + \frac{\zeta\mu^2}{2}\int\varphi^2\frac{d\sigma_2}{\sigma_2} - \frac{\zeta^2\mu^4}{8}\int\varphi^4\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}\right).$$

Puis, en divisant (8) par (9), développant par la formule du binome la puissance -1 de cette dernière parenthèse et effectuant les produits, on aura la fonction qui définit le mode de distribution des vitesses dans la section rétrécie :

$$(10) \qquad \frac{V_2}{U_2} = 1 + \frac{\zeta\mu^2}{2}\left(\varphi^2 - \int\varphi^2\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}\right) - \frac{\zeta^2\mu^4}{8}\left(\varphi^4 - \int\varphi^4\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}\right) - \frac{\zeta^2\mu^4}{4}\left(\varphi^2 - \int\varphi^2\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}\right)\int\varphi^2\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}.$$

Élevons enfin cette expression au cube, toujours jusqu'aux termes en μ^6 exclusivement; puis multiplions par $\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}$ et intégrons, en supprimant finalement du résultat les nombreux termes qui se détruisent. Il viendra, comme formule du coefficient α_2 qui était à déterminer dans (5) :

$$(11) \qquad \alpha_2 = 1 + \frac{3}{4}\zeta^2\mu^4\left[\int\varphi^4\frac{d\sigma_2}{\sigma_2} - \left(\int\varphi^2\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}\right)^2\right].$$

Observons, en portant dans (7) l'expression (9) de U_2, que le nombre ζ excède peu l'unité, savoir, d'une quantité comparable à μ^2; de sorte que l'on peut, sauf erreur négligeable (en μ^6), faire $\zeta = 1$ dans (11).

Rappelons, en outre, que l'on a $\varphi = 1 + \varepsilon$, avec ε assez petit pour que son cube ε^3 soit jugé insensible, ou pour qu'on puisse prendre

$$\varphi^2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2, \qquad \varphi^4 = 1 + 4\varepsilon + 6\varepsilon^2,$$

valeurs à substituer dans (11). Il vient ainsi, après des réductions évidentes,

$$(12) \qquad \alpha_2 = 1 + 3\mu^2 \left[\int \varepsilon^2 \frac{d\sigma_2}{\sigma_2} - \left(\int \varepsilon \frac{d\sigma_2}{\sigma_2} \right)^2 \right].$$

IV. On peut actuellement, avec une erreur relative sensible, il est vrai, mais néanmoins de l'ordre de petitesse de ε, remplacer $\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}$ par $\frac{d\sigma_1}{\sigma_1}$. Effectivement, si les ε s'annulaient, ou qu'on eût $V = U$ sur la section d'amont σ_1 et, à plus forte raison, sur les autres sections σ moindres, tous les filets fluides éprouveraient, d'une section à l'autre, les mêmes changements relatifs de grosseur et l'on aurait, pour chaque filet, $\frac{d\sigma}{\sigma} =$ constante. Plus généralement, il est clair que chaque filet occupera comparativement à d'autres, à la traversée d'une section quelconque, une fraction $\frac{d\sigma}{\sigma}$ de l'espace total σ, d'autant moindre qu'il y sera plus rapide par rapport à eux, leurs inégalités relatives de vitesse se répercutant sur la variation des sections partielles relatives $\frac{d\sigma}{\sigma}$, en raison inverse de ces vitesses.

Si donc, dans $\int \varepsilon^2 \frac{d\sigma_2}{\sigma_2}$, l'on remplace $\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}$ par $\frac{d\sigma_1}{\sigma_1}$, l'erreur absolue commise est de l'ordre du produit de ε^2 par ε, c'est-à-dire négligeable. De même, si l'on fait la pareille substitution dans $\int \varepsilon \frac{d\sigma_2}{\sigma_2}$, l'erreur est de l'ordre de ε^2. Mais alors l'intégrale restante, $\int \varepsilon \frac{d\sigma_1}{\sigma_1}$, devient la valeur moyenne de ε à travers σ_1, c'est-à-dire zéro d'après la définition même de ε; d'où il suit que $\int \varepsilon \frac{d\sigma_2}{\sigma_2}$ est de l'ordre de ε^2 et a son propre carré négligeable. Ainsi, la formule (12) se réduit à

$$(13) \qquad \alpha_2 = 1 + 3\mu^2 \int \varepsilon^2 \frac{d\sigma_1}{\sigma_1}.$$

Or on sait que le coefficient α considéré sur la section d'amont, c'est-à-dire α_1, excède l'unité de $3\int \varepsilon^2 \frac{d\sigma_1}{\sigma_1}$, à l'erreur près négligeable $\int \varepsilon^3 \frac{d\sigma_1}{\sigma_1}$. Donc, si nous retranchons l'unité des deux membres de (13), il vient, pour relier entre elles les deux valeurs de α entrant dans l'expression (5) du carré λ^2 du coefficient théorique du débit, la formule approximative très simple

$$\alpha_2 - 1 = \mu^4(\alpha_1 - 1). \tag{14}$$

V. La relation (5) devient alors, par l'élimination de α_2, la suppression *haut et bas* d'un facteur $1 - \mu^2$ commun et, finalement, une extraction de racine carrée,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2(\alpha_1 - 1)}} = 1 + \frac{\mu^2}{2}(\alpha_1 - 1). \tag{15}$$

On voit que le coefficient de débit λ, pour un liquide parfait, excède un peu l'unité. Si, par exemple, le venturi est *au quart*, ou que $\mu = \frac{1}{4}$, et si α_1 vaut environ 1,1, il vient

$$\lambda = 1 + \frac{\alpha_1 - 1}{32} = (\text{environ})\ 1 + \frac{1}{300}.$$

L'influence réductrice des frottements en retranchera, pour l'eau, une petite quantité, que l'on sait, par l'expérience des questions de cette nature et vu, ici, la très graduelle variation supposée des sections σ ou des vitesses, être comparable seulement au centième. La valeur définitive de λ se trouvera donc un peu inférieure à l'unité, d'une fraction de centième, conformément aux débits constatés notamment par M. Camichel, dans des observations soignées de laboratoire.

Intéressant théorème de réciprocité dans les phénomènes permanents de filtration, dû à M. Umberto Puppini : *Rapport sur le prix Boileau d'Hydraulique pour l'année* 1915;

Par J. BOUSSINESQ.

Un seul candidat, M. Umberto Puppini, de Bologne, s'est présenté en nous envoyant un ensemble de travaux connexes, imprimés (en italien), dont le principal et le plus récent, de 1914, a pour titre « *Le principe de réciprocité pour les nappes artésiennes* ».

Ce travail est relatif aux divers modes possibles d'écoulement *permanent*, par des sources ou des puits supposés contenir toujours une eau en repos ou presque en repos (avec surface libre à la pression atmosphérique), du liquide que fournit une vaste nappe aqueuse infiltrée ou dans le sol, ou sous le sous-sol imperméable, d'une contrée, et en équilibre aux grandes distances de la région des puits considérés. La *hauteur* φ *de charge* de la nappe aqueuse, somme, en chaque point (x, y, z), de *l'altitude* effective $\mathfrak{z}$ de ce point et de la pression p (évaluée en hauteur d'eau) qu'y supporte le liquide, est donc une quantité *constante loin des puits;* et elle l'est même près des puits si aucun d'eux ne débite de liquide, cas où φ se réduit partout à sa valeur sur une quelconque des surfaces libres des puits, savoir à l'altitude, alors commune, de celles-ci. On prend comme plan horizontal de repère leur plan même dans cet état, plan au-dessus duquel se compteront les altitudes et dont les points situés dans les parties de la nappe aqueuse très éloignées sont, par suite, constamment à la pression atmosphérique ou, comme on dit, *sans pression*. On aura ainsi, dans la nappe, $\varphi = 0$ aux distances infinies de la région des puits.

Dès lors, dans tout régime d'écoulement permanent à étudier, la charge φ à l'intérieur d'un quelconque des puits égale l'altitude (négative) de sa surface libre actuelle par rapport au plan de repère, c'est-à-dire la *dépression* fixe h (prise avec le signe $-$) de son niveau, corrélative au mouvement effectif de la nappe; ce qui donnera, sur toute l'étendue des parois *mouillées* des puits, $\varphi = -h$.

Si K, fonction de (x, y, z) censée donnée, désigne le coefficient de filtration du terrain au point (x, y, z), et que dn soit la normale à un élément plan quelconque mené par ce point, on sait que le volume liquide q débité dans l'unité de temps par l'unité d'aire de cet élément plan, en venant du côté où l'on a tiré la normale dn, aura la valeur $K\frac{d\varphi}{dn}$: principe d'où l'on déduit aisément, en l'appliquant aux six faces d'un parallélépipède rectangle élémentaire $dx\,dy\,dz$ et en exprimant la conservation des volumes liquides débités d'instant en instant à travers ces faces, l'équation indéfinie du phénomène,

$$(1) \qquad \frac{d}{dx}\left(K\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(K\frac{d\varphi}{dz}\right) = 0.$$

Il y aura lieu de considérer celle-ci dans tout l'espace compris entre les deux limites suivantes : d'une part, l'ensemble σ des parois *mouillées* des puits, où la charge φ aura, dans chaque puits, la valeur $-h$, où, de plus, on aura mené les normales dn vers l'intérieur du terrain aux éléments $d\sigma$ de paroi et où afflueront dans ces puits les débits $q = K\frac{d\varphi}{dn}$ (par unités d'aire et de temps); d'autre part, une grande surface fixe σ_1 coupant tous les filets liquides qui aboutissent aux puits et circonscrite à la région où ils sont groupés, mais l'entourant d'assez loin pour que les vitesses de filtration y soient insensibles ou, la charge φ, très voisine de zéro. Si dn_1 est la normale à chaque élément $d\sigma_1$ de cette surface, dirigée hors de σ_1, c'est-à-dire du côté d'où viennent les filets fluides, et que q_1 soit le débit *unitaire* $K\frac{d\varphi}{dn_1}$ de $d\sigma_1$, il est clair que le débit total de la nappe par unité de temps s'écrira indifféremment $\int q\,d\sigma$ ou $\int q_1\,d\sigma_1$; en sorte que ces deux intégrales auront une même valeur finie.

Cela posé, le théorème de réciprocité découvert par notre candidat,

et démontré par lui au moyen de l'*Analyse vectorielle*, s'obtient en comparant deux modes quelconques distincts d'écoulement permanent, dont l'un sera, par exemple, un écoulement spontané; l'autre, cet écoulement modifié par un jeu de pompes dans les puits (ou les sources), ou par une disposition différente des conduits d'évacuation, etc. Dans le passage d'un mode à l'autre, les surfaces libres souterraines, quand il en existe, se déplaceront assez peu et presque parallèlement à elles-mêmes en chaque endroit.

Soient : φ, h, q, q_1 les notations relatives au premier mode; φ', h', q', q'_1 les notations pour le second mode, où l'équation (1) devient

$$(1\,bis)\qquad \frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d\varphi'}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\frac{d\varphi'}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(\mathrm{K}\frac{d\varphi'}{dz}\right)=0$$

et où l'on aura

$$(\text{sur }\sigma)\quad \mathrm{K}\frac{d\varphi'}{dn}=q',\qquad (\text{sur }\sigma_1)\quad \mathrm{K}\frac{d\varphi'}{dn_1}=q'_1,\qquad \int q'\,d\sigma'=\int q'_1\,d\sigma'_1,$$

de même qu'on avait

$$(\text{sur }\sigma)\quad \mathrm{K}\frac{d\varphi}{dn}=q,\qquad (\text{sur }\sigma_1)\quad \mathrm{K}\frac{d\varphi}{dn_1}=q_1,\qquad \int q\,d\sigma=\int q_1\,d\sigma_1.$$

L'équation cherchée de réciprocité sera

$$(2)\qquad \int h'q\,d\sigma=\int hq'\,d\sigma'.$$

Pour la démontrer par l'Analyse ordinaire, ajoutons les équations (1) et (1 *bis*), après les avoir multipliées respectivement par $-\varphi'$ et par φ. Il viendra

$$(3)\qquad \begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left(\varphi.\mathrm{K}\frac{d\varphi'}{dx}-\varphi'.\mathrm{K}\frac{d\varphi}{dx}\right)\\&+\frac{d}{dy}\left(\varphi.\mathrm{K}\frac{d\varphi'}{dy}-\varphi'.\mathrm{K}\frac{d\varphi}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(\varphi.\mathrm{K}\frac{d\varphi'}{dz}-\varphi'.\mathrm{K}\frac{d\varphi}{dz}\right)=0.\end{aligned}$$

Multiplions celle-ci elle-même par $dx\,dy\,dz$, puis intégrons dans toute la partie mouillée de la nappe aquifère comprise entre les surfaces σ_1 et σ, partie à très peu près commune chez les deux modes d'écoulement et dont on pourra sans erreurs relatives sensibles supprimer, près des

surfaces libres, les éléments non communs. Appliquons d'ailleurs à chaque terme la transformation habituelle, qui change en intégrales de surface les intégrales de volume où une intégration sur trois s'effectue d'elle-même. Enfin, observons qu'aucun débit appréciable ne sera fourni par les parties de la *frontière* qui se trouveront ou contiguës à des parois, ou même voisines d'une surface libre sur laquelle glissent les filets superficiels, tandis que les filets voisins, presque de même direction et traversant cependant la frontière en question, la perceront comme tangentiellement, sous des angles infiniment aigus, et ne constitueront d'ailleurs en tout qu'une fraction très faible, insensible, de l'ensemble des filets. Il viendra simplement, vu que $\varphi = -h$ et $\varphi' = -h'$ sur les parois mouillées des puits,

$$\int (hq' - h'q)\, d\sigma + \int (\varphi q'_1 - \varphi' q_1)\, d\sigma_1 = 0.$$

Ici, dans la seconde intégrale, les débits $\int q'_1\, d\sigma_1$, $\int q_1\, d\sigma_1$ ont très sensiblement mêmes valeurs finies que $\int q'\, d\sigma$, $\int q\, d\sigma$; mais leurs produits par les valeurs moyennes correspondantes, très petites, de φ et de φ' sont négligeables. Cette seconde intégrale s'évanouit par conséquent et il reste bien la formule (2) de réciprocité.

Le théorème de M. Umberto Puppini consiste donc en ce que *les produits respectifs des débits des divers puits dans le premier mode d'écoulement, par les dépressions h' qui s'y observent dans le second mode, donnent même somme que les produits respectifs des débits dans le second mode, par les dépressions h qui s'y observent dans le premier.*

L'auteur constate d'ailleurs la suffisante exactitude de cette formule dans des cas observés antérieurement à sa découverte, du moins pour une région du Piémont où sont trois puits servant à l'alimentation de Turin en eau potable; et il en fait l'application pratique, par exemple au cas où, ayant observé à la fois *débits* et *dépressions* lorsque chaque puits d'une région fonctionne seul à tour de rôle, on se contente de noter ensuite les dépressions produites dans chacun lors de leur fonctionnement simultané. La comparaison de ce cas plus complexe à chacun des précédents fournit précisément autant d'équa-

tions qu'il y a de puits et permet, par conséquent, le calcul théorique de leurs débits partiels.

Ce principe de réciprocité peut donc être d'autant plus utile, que l'équation indéfinie (1) du problème est absolument inintégrable, à raison non seulement de la fonction empirique et inconnue K qui y paraît, mais aussi de la figure, tout aussi difficile à déterminer et à exprimer, des parois imperméables limitant la nappe.

En 1874, Betti, dans les questions d'équilibre élastique [1], et l'un de nous, dans celles de mouvements vibratoires [2], avaient, indépendamment l'un de l'autre, remarqué un théorème de réciprocité analogue, mais plus visible peut-être. Il y avait donc un très réel mérite à dégager celui-ci dans une question d'écoulement permanent. On voit que notre candidat en a, de plus, saisi l'utilité pratique et montré l'emploi, après en avoir contrôlé l'exactitude au moyen d'expériences faites antérieurement par d'autres. Aussi votre Commission est-elle unanime à vous proposer, comme lauréat du Prix Boileau d'Hydraulique pour 1915, M. l'ingénieur *Umberto Puppini*, professeur d'Hydraulique agricole à l'École Royale d'Agriculture de l'Université de Bologne.

---

(1) *Teoria della Elasticita del professore Enrico Betti*, p. 40 (Pisa, 1874).

(2) *Sur deux lois simples de la résistance vive des solides* (*Comptes rendus* des Séances de l'Académie des Sciences, 7 et 14 décembre 1874). *Voir* le texte entre les deux formules (7) et (8).

Complément à un Mémoire du deuxième fascicule du Journal de Mathématiques *pour* 1912, *sur la théorie géométrique des déplacements bien continus des corps déformables : remarques et calculs montrant que la complication des formules pour les grands déplacements est due non aux déformations, mais aux rotations;*

Par J. BOUSSINESQ.

I. A l'article IV du petit Mémoire cité (p. 225 à 227 du Volume), j'ai reconnu que, dans le cas de déplacements ξ, η, ζ corrélatifs à de *fortes* déformations d'une particule, les formules des neuf dérivées partielles premières de ξ, η, ζ par rapport aux coordonnées primitives x, y, z y sont linéaires et homogènes en fonction des trois dilatations principales ∂_1, ∂_2, ∂_3 de la particule, *quand le trièdre rectangulaire des trois fibres principales* (ou dont ∂_1, ∂_2, ∂_3 désignent les dilatations) *a gardé son orientation primitive;* d'où il suit que c'est *uniquement* la rotation du trièdre, dite *rotation moyenne* de la particule et censée, si l'on veut, se faire après la déformation, qui vient compliquer les formules de cette théorie, de manière à ne les laisser *linéaires*, par rapport à l'ensemble des rotations et des déformations, que pour des déformations et des rotations infiniment petites.

Afin de mieux apprécier le degré de complication que les rotations y introduisent, traitons le cas, de beaucoup le plus simple, où les deux coordonnées x, y, avec les deux déplacements ξ, η, sont seules à considérer, c'est-à-dire le cas des déplacements ξ, η d'un *feuillet* matériel, produits dans son propre plan.

Alors, s'il s'agit d'une *déformation pure* (ou sans rotation) d'un élément d'aire du feuillet, les dilatations principales se réduisent à ∂_1, ∂_2, et leurs cosinus directeurs respectifs, par rapport aux axes

généraux et fixes des x et des y, à

$$\alpha_1 = \cos\varphi, \qquad \beta_1 = \sin\varphi, \qquad \alpha_2 = -\sin\varphi, \qquad \beta_2 = \cos\varphi,$$

φ, $\frac{\pi}{2} + \varphi$ désignant les deux *azimuts* respectifs, restés jusque-là invariables, de ∂_1 et de ∂_2, c'est-à-dire des deux fibres principales émanées d'un point central quelconque M de l'élément considéré de feuillet. D'ailleurs, d'après les formules du n° 8 du Mémoire (p. 219), les deux dérivées (*directes*) A, B de ξ en x et de η en y, y ont les expressions

$$(1)\quad \begin{cases} A = \alpha_1^2\partial_1 + \alpha_2^2\partial_2 = \partial_1\cos^2\varphi + \partial_2\sin^2\varphi = \dfrac{\partial_1+\partial_2}{2} + \dfrac{\partial_1-\partial_2}{2}\cos 2\varphi, \\ B = \beta_1^2\partial_1 + \beta_2^2\partial_2 = \partial_1\sin^2\varphi + \partial_2\cos^2\varphi = \dfrac{\partial_1+\partial_2}{2} - \dfrac{\partial_1-\partial_2}{2}\cos 2\varphi, \end{cases}$$

tandis que la valeur, alors commune et appelée F, des deux dérivées (*obliques*) de ξ en y et de η en x est

$$(2)\qquad F = \alpha_1\beta_1\partial_1 + \alpha_2\beta_2\partial_2 = (\partial_1 - \partial_2)\cos\varphi\sin\varphi = \frac{\partial_1-\partial_2}{2}\sin 2\varphi.$$

II. Faisons passer, par le point matériel choisi M de l'élément (de feuillet) qui a pris sa nouvelle configuration, mais où les deux fibres principales ont gardé leurs directions primitives, deux axes rectangulaires des h et des k, constamment parallèles aux axes fixes des x et des y; et menons la fibre MK joignant cette origine mobile M à tout point matériel K de l'élément de feuillet. Soient h et k les deux coordonnées *primitives* du point K par rapport à ces axes, c'est-à-dire les accroissements élémentaires qu'éprouvaient x et y dans l'état primitif, quand on passait de M à K. Après la déformation (sans rotation), qui a changé MK en M'K', ces coordonnées auront évidemment crû de $Ah + Fk$, $Fh + Bk$; et, si l'on appelle h', k' les deux nouvelles projections, sur les axes des h et des k, de la fibre MK devenue M'K', projections que l'on peut dessiner ou matérialiser sur l'élément de feuillet ainsi parvenu à sa configuration définitive, on aura

$$(3)\qquad h' = (1 + A)h + Fk, \qquad k' = Fh + (1 + B)k,$$

avec A, B, F fonctions bien déterminées, d'après (1) et (2), des deux dilatations principales données ∂_1, ∂_2 et de l'angle φ de ∂_1 avec les x avant toute rotation de l'élément.

Imprimons maintenant à cet élément de feuillet, autour du point central M, une rotation ω quelconque (comptée positivement dans le sens *direct* allant des x positifs vers les y positifs), pour lui faire prendre l'orientation qu'il a effectivement après les déplacements ξ, η étudiés. Alors les *fibres* h' et k' ci-dessus, projections matérialisées de la droite M'K' devenue maintenant dans l'espace M''K'', dessineront, par rapport aux axes des h et des k, à orientation fixe, deux axes rectangulaires des h' et des k' faisant avec ces axes des h, k, l'un, celui des h', les deux angles $\omega, \frac{\pi}{2} - \omega$, l'autre, celui des k', les deux angles $\frac{\pi}{2} + \omega, \omega$. Si h'', k'' sont les nouvelles coordonnées de K, par rapport aux axes des h, k, on aura, par les formules usuelles des projections ou de la transformation des coordonnées,

$$h'' = h' \cos\omega - k' \sin\omega, \qquad k'' = h' \sin\omega + k' \cos\omega,$$

c'est-à-dire, vu les valeurs (3) de h' et de k',

$$(4) \qquad \begin{cases} h'' = [(1 + A)\cos\omega - F\sin\omega]h + [F\cos\omega - (1 + B)\sin\omega]k, \\ k'' = [(1 + A)\sin\omega + F\cos\omega]h + [F\sin\omega + (1 + B)\cos\omega]k. \end{cases}$$

III. Identifions-les aux expressions évidentes

$$h'' = \left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right)h + \frac{d\xi}{dy}k, \qquad k'' = \frac{d\eta}{dx}h + \left(1 + \frac{d\eta}{dy}\right)k,$$

qui doivent leur être égales quel que soit le rapport de h à k; et les quatre dérivées partielles premières de ξ, η en x et y, qui expriment la manière dont varient les déplacements dans le voisinage du point M, se trouveront déterminées en fonction des dilatations principales et de la rotation ω. Si, à l'inverse, ∂_1, ∂_2, φ et ω, ou A, B, F et ω, sont inconnus, on aura, pour les déterminer en fonction des quatre dérivées partielles de ξ, η, les quatre équations

$$(5) \qquad \begin{cases} (1 + A)\cos\omega - F\sin\omega = 1 + \dfrac{d\xi}{dx}, & (1 + B)\cos\omega + F\sin\omega = 1 + \dfrac{d\eta}{dy}, \\ F\cos\omega - (1 + B)\sin\omega = \dfrac{d\xi}{dy}, & F\cos\omega + (1 + A)\sin\omega = \dfrac{d\eta}{dx}. \end{cases}$$

On voit qu'elles sont bien linéaires, par rapport à A, B, F (ou à ∂_1, ∂_2) et aux dérivées de ξ, η, mais transcendantes (trigonométriques) en ω; de sorte qu'elles ne deviennent, dans l'ensemble, *linéaires et*

homogènes, c'est-à-dire simples, *que si la rotation* ω *est infiniment petite* (cas où l'on peut prendre $\cos\omega = 1$, $\sin\omega = \omega$) *et si, de plus*, A, B, F, *ou* ∂_1, ∂_2, *sont en même temps très petits.*

IV. La première (5) ajoutée à la seconde, et la troisième, retranchée de la quatrième, donnent respectivement

$$(2 + A + B)\cos\omega = 2 + \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}, \qquad (2 + A + B)\sin\omega = \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy},$$

équations revenant à prendre, d'abord, par l'élimination de $2 + A + B$, ensuite par celle de ω, avec extraction d'une racine carrée et substitution finale de $\partial_1 + \partial_2$ à $A + B$ d'après (1),

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\omega &= \frac{\dfrac{d\eta}{dx} - \dfrac{d\xi}{dy}}{2 + \dfrac{d\xi}{dx} + \dfrac{d\eta}{dy}}, \\ \partial_1 + \partial_2 &= -2 + \sqrt{\left(2 + \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right)^2}. \end{aligned}\right.$$

Il résulte, d'autre part, de la quatrième (5), ajoutée à la troisième, et de la seconde (5), retranchée de la première, les deux relations

$$2F\cos\omega + (A - B)\sin\omega = \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx},$$
$$(A - B)\cos\omega - 2F\sin\omega = \frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy}.$$

Multiplions respectivement la première de celles-ci soit par $\sin\omega$, soit par $\cos\omega$, et la seconde, soit par $\cos\omega$, soit par $-\sin\omega$; puis, dans chaque cas, ajoutons. Il viendra, pour tenir lieu de ces équations et, en y joignant les deux (6) qui ont déjà fait connaître ω et $\partial_1 + \partial_2$, pour remplacer les quatre (5) :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} A - B &= \left(\frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy}\right)\cos\omega + \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)\sin\omega, \\ 2F &= -\left(\frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy}\right)\sin\omega + \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)\cos\omega. \end{aligned}\right.$$

V. On portera ces valeurs de $A - B$ et de $2F$ dans les deux équations, résultant immédiatement de (1) et (2),

$$(8)\qquad (\partial_1 - \partial_2)\cos 2\varphi = A - B, \qquad (\partial_1 - \partial_2)\sin 2\varphi = 2F,$$

et qui donnent alors

$$(9)\qquad \operatorname{tang} 2\varphi = \frac{2F}{A-B}, \qquad (\partial_1 - \partial_2)^2 = (A-B)^2 + 4F^2.$$

On voit en particulier que, de l'expression de $\operatorname{tang} 2\varphi$, se déduiront bien, pour φ, des valeurs distantes de $\frac{\pi}{2}$ et, par conséquent, les directions *rectangulaires* prévues, pour les deux dilatations principales ∂_1, ∂_2.

A part le cas de dérivées de ξ, η très petites, dont on puisse négliger les carrés et produits, toutes ces formules (5) à (9) restent un peu compliquées, sauf quand on annule la rotation ω, en posant $\frac{d\xi}{dy} = \frac{d\eta}{dx}$ et, par suite, dans (5),

$$A = \frac{d\xi}{dx}, \qquad B = \frac{d\eta}{dy}, \qquad F = \frac{d\xi}{dy} = \frac{d\eta}{dx};$$

cas où il vient

$$\partial_1 + \partial_2 = A + B = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}.$$

En résumé, même quand les déplacements sont plans, la théorie des rotations *finies* reste notablement plus complexe que celle des *déformations pures*.

VI. Toutefois, certains éléments sont relativement simples. Tel est d'abord le carré de la différence $\partial_1 - \partial_2$, lequel donne, d'après (7) et la seconde (9),

$$(10)\qquad \partial_1 - \partial_2 = \pm\sqrt{\left(\frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)^2}.$$

Les nouvelles valeurs $1 + \partial_1$, $1 + \partial_2$, par unité de longueur primitive, des deux fibres principales auront donc pour somme le radical figurant au second membre de la dernière formule (6) et, pour différence, le radical du second membre de (10). Ces deux valeurs, demi-somme et demi-différence des deux radicaux, s'obtiennent donc indépendamment des deux angles ω, φ; et leur produit, nouvelle aire de l'élément de feuillet, rapportée, elle aussi, à l'unité d'aire primitive, est simplement, après des réductions immédiates,

$$(11)\qquad (1+\partial_1)(1+\partial_2) = \left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right)\left(1 + \frac{d\eta}{dy}\right) - \frac{d\xi}{dy}\frac{d\eta}{dx},$$

expression bien connue, que l'on utilise dans la théorie de la *houle*.

Quand les trois coordonnées x, y, z et les trois déplacements ξ, η, ζ sont en jeu, le produit analogue

$$(1+\partial_1)(1+\partial_2)(1+\partial_3),$$

nouvelle valeur de l'unité de volume primitif d'une particule, a également une expression rationnelle assez simple, bien connue aussi; savoir, le déterminant

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} 1+\dfrac{d\xi}{dx}, & \dfrac{d\xi}{dy}, & \dfrac{d\xi}{dz} \\ \dfrac{d\eta}{dx}, & 1+\dfrac{d\eta}{dy}, & \dfrac{d\eta}{dz} \\ \dfrac{d\zeta}{dx}, & \dfrac{d\zeta}{dy}, & 1+\dfrac{d\zeta}{dz} \end{vmatrix} \quad (^1).$$

Enfin, si l'on remplace, au second membre de la première (9), $2F$ et $A-B$ par leurs valeurs (7), où l'on aura substitué à $\cos\omega$ et à $\sin\omega$ les quantités proportionnelles

$$2+\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy} \quad \text{et} \quad \frac{d\eta}{dx}-\frac{d\xi}{dy},$$

il vient, pour déterminer les azimuts φ des fibres principales dont les dilatations sont ∂_1, ∂_2, la formule, plus complexe que les trois autres (6) et (10),

$$(13)\qquad \operatorname{tang} 2\varphi = \frac{\dfrac{d\xi}{dy}+\dfrac{d\eta}{dx}+\dfrac{d\xi}{dx}\dfrac{d\xi}{dy}+\dfrac{d\eta}{dx}\dfrac{d\eta}{dy}}{\dfrac{d\xi}{dx}-\dfrac{d\eta}{dy}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\xi^2}{dx^2}-\dfrac{d\xi^2}{dy^2}+\dfrac{d\eta^2}{dx^2}-\dfrac{d\eta^2}{dy^2}\right)}.$$

Le discernement des valeurs de φ, convenant soit à ∂_1, soit à ∂_2, se ferait par la considération des équations (8).

---

(1) On peut voir par exemple, à ce sujet, mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, Tome Ier (*Calcul différentiel*), fascicule II (*Compléments*), p. 90*. Les notations y sont seulement différentes : nos variables indépendantes actuelles x, y, z s'y appellent ξ, η, ζ et les fonctions représentées ici par $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ s'y appellent x, y, z. De plus, la quantité qu'on y a en vue est la densité ρ de la particule, inverse du déterminant, et non le volume, proportionnel au déterminant.

Sur les marées d'un bassin à parois verticales ;

PAR FRANÇOIS JAGER.

INTRODUCTION.

L'étude des marées océaniques peut sembler au premier abord de peu d'intérêt : c'est un phénomène considéré comme bien connu, puisqu'on arrive à le prédire sans mécompte et avec une précision très satisfaisante.

Cependant, même en faisant complètement abstraction de l'intérêt purement mathématique qu'elle présente, leur étude théorique peut permettre d'élucider plusieurs points encore obscurs de la Science. Si, en effet, les résultats théoriques ne coïncident pas avec les données expérimentales (et c'est ce qui semble résulter d'un récent travail de M. Blondel) le point de départ sera nécessairement faux; et, par là même, on contrôlera la légitimité des hypothèses fondamentales relatives à la nature du phénomène.

Dans la théorie que nous allons exposer, presque tout peut être considéré comme certain d'avance. Deux points seuls restent douteux :

1° Le frottement est-il négligeable? Le fait n'est pas douteux pour les bassins très profonds et peu accidentés, comme le prouvent les calculs de M. Hough et les mesures du coefficient de viscosité de l'eau. Mais en est-il encore de même pour les bassins océaniques dont les fonds accidentés peuvent engendrer des tourbillons capables de rendre sensible l'influence du frottement? Le calcul permettrait sans doute de déterminer l'ordre de grandeur du phénomène.

2° Nous supposerons la croûte terrestre indéformable. Or les marées de l'écorce ont été mises en évidence et ont sur les marées océaniques une influence que la théorie permettrait peut-être de mesurer : on pourrait en déduire le coefficient d'élasticité du noyau de la Terre.

Le problème dans toute sa complexité n'a pu être abordé avec succès que grâce aux nouvelles méthodes introduites en Analyse, depuis quelques années, par M. Fredholm, en particulier; et c'est à M. Poincaré qu'on doit en fait la première solution du problème envisagé au point de vue général.

Dans ce travail, je me suis borné à l'étude des marées proprement dites, c'est-à-dire des oscillations contraintes d'un bassin limité par des parois verticales, en tenant compte de la force centrifuge composée due à la rotation de la Terre.

Pour ne pas trop compliquer la forme des équations, j'ai négligé l'attraction sur lui-même du bourrelet liquide, dû à la marée, ainsi que le frottement. Enfin, j'ai supposé la croûte terrestre indéformable.

Dans le Chapitre I, je rappellerai brièvement la mise en équation du problème général des marées, telle que l'a indiquée M. Poincaré à son Cours.

Le Chapitre II comprendra l'application des équations de Fredholm à la démonstration de l'existence de la solution. J'ai utilisé pour cette démonstration une méthode introduite par M. Picard dans son Mémoire : *Sur la solution du problème général de Dirichlet.* Cela m'a conduit à la considération de la fonction de Green, relative à l'équation de Laplace, qui serait définie par la condition au contour

$$\frac{\partial G}{\partial n} + C\frac{\partial G}{\partial s} = f(s),$$

$f(s)$ étant donnée.

En achevant, en campagne, la rédaction de ce travail, je me suis aperçu que le raisonnement par lequel j'essayais de prouver l'existence de cette fonction de Green était insuffisant. Désespérant de pouvoir le compléter dans les conditions où je me trouve actuellement, je me suis décidé à publier un travail incomplet; peut-être

trouvera-t-on qu'il n'est pas sans intérêt d'avoir ramené la solution du problème des marées à celle d'une question relative à l'équation simple de Laplace.

Enfin, au Chapitre III, nous ferons application de la méthode de Ritz, remarquable au point de vue de certaines applications numériques, mais qui, au point de vue purement théorique, donne lieu à de nombreuses difficultés.

On me permettra, en terminant, de dire toute ma vive reconnaissance à MM. Appell et Picard pour la haute bienveillance qu'ils ont bien voulu me témoigner; et à M. Lebesgue pour les précieux conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de me donner. Enfin, je tiens à rendre ici un dernier hommage à la mémoire de Henri Poincaré qui avait bien voulu me guider au début de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE.

Hough, *Philos. Trans. of the Roy. Soc. of London*, vol. CLXXXIX (1897) et CXCI (1898).

G.-H. Darwin, *Scientific Papers*, vol. I et II. Cambridge, 1907 et 1908.

A.-Rollin Harrys, *Mémoires* publiés par le Coast and Geodetic Survey.

Lallemand, *Comptes rendus Acad. Sc.*, t. CXLIX, 1909, p. 474.

A.-E.-H. Love, *Proceedings of the Roy. Soc. of London*, série A, vol. LXXXII, p. 43; *Proc. of the London Math. Soc.*, série 2, vol. XII, p. 309; *Some Problems of Geodynamics* (Cambridge, 1911); *Mémoire* lu au Congrès international des Mathématiciens (Cambridge).

Lord Rayleigh, *Notes on Tidal oscillations upon a Rotating globe* (*Proc. of the Roy. Soc. of London*, série A, vol. LXXXII, p. 448).

Poincaré, *Leçons de Mécanique céleste*, t. III; *Théorie des marées*.

Blondel, *Sur les marées de la mer Rouge* (Thèse de doctorat).

CHAPITRE I.

L'EQUATION GÉNÉRALE DES MARÉES.

Prenons comme unité le rayon de la sphère terrestre, et comme coordonnées des points de cette surface la colatitude θ et la longitude ψ.

En faisant une représentation conforme de la surface du bassin considéré sur une carte géographique, nous désignerons par x, y les coordonnées rectangulaires sur la carte du point (θ, ψ).

A un élément de courbe ds, ou de surface $d\sigma$ de la sphère, correspondra un élément semblable de courbe ds' ou de surface $d\sigma'$ sur la carte. Soit $k(x, y)$ le rapport de similitude. On aura

$$ds' = k\, ds, \qquad d\sigma' = k^2\, d\sigma.$$

Considérons le cône ayant pour sommet le centre de la sphère et pour directrice la courbe C limitant le domaine $\mathfrak{D}$ considéré, dont l'élément soit $d\sigma$. En vertu de la marée, le volume du liquide renfermé dans ce cône subira une variation que nous allons exprimer de deux manières différentes :

1° L'augmentation du volume sera d'abord représentée par la quantité de liquide qui pénètre à travers la surface latérale. Soit h la profondeur comptée positivement vers le bas à partir de la surface non troublée. En appelant N la composante normale du déplacement à l'élément ds, il entrera par ce rectangle élémentaire la quantité $h\mathrm{N}\, ds$, donc pour toute la surface latérale la quantité

$$\int_{\mathrm{C}} h\mathrm{N}\, ds;$$

2° En appelant ζ la surélévation due à la marée (ζ étant comptée comme h), l'accroissement de volume pourra s'écrire

$$-\int\int_{\mathfrak{D}} \zeta\, d\sigma.$$

Donc

$$\int_C hN\,ds = -\int\int_{\mathfrak{D}} \zeta\,d\sigma$$

ou, en passant de la sphère à la carte,

$$(1)\qquad \int_C hN\,ds' = -\int\int_{\mathfrak{D}} \frac{\zeta}{k^2}\,d\sigma.$$

Il faut évaluer hN. Pour cela, négligeons d'abord la courbure de la sphère. Soient u, v, w les trois composantes du déplacement, $X\,dm$, $Y\,dm$, $Z\,dm$ les composantes de la force appliquée à l'élément de masse dm, p la pression. Les équations générales de l'Hydrodynamique sont :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= X - \frac{\partial p}{\partial x},\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y},\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Ici, les forces appliquées sont : la pesanteur, la force centrifuge composée et les forces perturbatrices, dues aux astres et soumises au potentiel V. En supposant une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe Oz et les déplacements u, v, w proportionnels à $e^{\lambda t}$, λ étant la période de la force perturbatrice considérée, on aura

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda^2 u - 2\omega\lambda v &= \lambda^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x},\\ \lambda^2 v + 2\omega\lambda u &= \lambda^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y},\\ \lambda^2 w \qquad\quad &= \lambda^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

où l'on a posé

$$\varphi = \frac{V - p}{\lambda^2}.$$

Mais, au fond du bassin considéré, on aura, la composante normale du déplacement étant nulle,

$$u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} = w.$$

Si donc les dérivées de h sont petites relativement à u et v, w sera également petit vers le fond du bassin. Soit w_0 la valeur de w au fond. En un point quelconque du liquide, situé à une distance z de la surface libre, on aura

$$w = w_0 + (z - h)\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Mais dans tous les bassins océaniques, on peut considérer la profondeur h comme très petite par rapport aux deux autres dimensions : donc $z - h$ l'est aussi ; $\frac{\partial w}{\partial z}$ est du même ordre de grandeur que les déplacements des molécules, donc aussi que $z - h$. Donc w sera toujours négligeable devant u et v. Les équations (3) résolues par rapport à u et v donneront donc

$$(4)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\lambda^2}{\lambda^2 + 4\omega^2}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{2\omega}{\lambda}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right), \\ v = \dfrac{\lambda^2}{\lambda^2 + 4\omega^2}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - \dfrac{2\omega}{\lambda}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right). \end{cases}$$

Nous aurons alors

$$(5)\qquad N = -u\frac{\partial y}{\partial s} + v\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 4\omega^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{2\omega}{\lambda}\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right).$$

Si maintenant nous passons à un élément de la surface sphérique, nous pourrons le considérer comme plan et, dans la formule (5), pour chaque élément de la surface sphérique, la rotation sera $\omega\cos\theta$ au lieu de ω. Donc, il suffira de remplacer ω par $\omega\cos\theta$ dans la formule (5), pour obtenir

$$(6)\qquad N = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 4\omega^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right),$$

ω désignant la vitesse de rotation de la Terre et $\omega\cos\theta$ étant sa projection sur la ligne des pôles.

En posant

$$(7)\qquad \begin{cases} h_1 = \dfrac{\lambda^2 h}{\lambda^2 + 4\omega^2\cos^2\theta}, \\ h_2 = \dfrac{2\omega\cos\theta}{\lambda}h_1, \end{cases}$$

et en passant à la carte, on obtient

$$(8)\qquad \int_C hN\,ds' = \int_C \left(h_1 \frac{\partial\varphi}{\partial n'} - h_2 \frac{\partial\varphi}{\partial s'}\right) ds',$$

ds' et dn' indiquant, comme nous l'avons expliqué, l'élément de contour et l'élément de normale au contour sur la carte.

En transformant cette dernière intégrale en intégrale de surface, il vient

$$(9)\qquad \int_C hN\,ds' = -\int\int_{\Theta} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h_1 \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial h_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial h_2}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] dx\,dy.$$

Donc, à cause de la relation (1),

$$(10)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(h_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h_1 \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial(h_2, \varphi)}{\partial(x, y)} = \frac{\zeta}{k^2}.$$

Pour évaluer ζ, on se servira de la relation évidente

$$V = V_0 + \frac{\partial V}{\partial z}\zeta,$$

en appelant V_0 la valeur de V sur la surface en équilibre. Mais on a sensiblement, à cause de l'éloignement des astres,

$$\frac{\partial V}{\partial z} = g,$$

g désignant la valeur de l'accélération due à la pesanteur à la surface de la Terre; et V_0 n'est autre chose que le potentiel $Ce^{\lambda t}$ de l'astre perturbateur. Enfin, à la surface libre, p est nulle; donc

$$V = \lambda^2\varphi.$$

D'où

$$(11)\qquad \zeta = \frac{\lambda^2\varphi}{g} - \frac{Ce^{\lambda t}}{g}.$$

Nous obtenons ainsi l'équation définitive

$$(12)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(h_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h_1 \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial(h_2, \varphi)}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2\varphi}{gk^2} = -\frac{Ce^{\lambda t}}{gk^2}$$

à laquelle la fonction φ doit satisfaire à l'intérieur du domaine Θ qui correspond sur la carte au bassin considéré. Le second membre

représente l'une des composantes isochrones du potentiel des forces perturbatrices.

Comme nous nous bornons à étudier ici les oscillations contraintes, $C(x, y)$ et λ feront partie des données du problème. L'étude des oscillations propres consisterait au contraire à calculer la valeur de λ satisfaisant à l'équation (12) sans second membre.

Dans le cas des oscillations contraintes, λ sera toujours purement imaginaire, les forces perturbatrices étant périodiques : les coefficients h_1 et h_2 peuvent donc devenir infinis, quand θ est solution de l'équation

$$\lambda^2 + 4\omega^2 \cos^2\theta = 0.$$

C'est la latitude critique.

Conditions aux limites. — Deux cas sont à distinguer :

D'une part, le bassin peut être limité par des parois verticales. La fonction devra donc annuler sur le bord la composante normale N du déplacement. Il faudra donc que la relation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{2\omega \cos\theta}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0 \tag{13}$$

soit satisfaite en tout point du contour.

Si, au contraire, les parois du bassin sont inclinées, on aura $h = 0$ le long du contour, et φ ne sera assujettie qu'à la seule condition de rester finie au bord. Cette condition n'est pas superflue, et, pour s'en rendre compte, il suffit de se reporter à l'équation (12) sans second membre, en supposant que φ et tous les coefficients ne dépendent que de x. On verra immédiatement que cette équation différentielle peut admettre une solution infinie. En effet, soient φ et ψ ses deux solutions, φ étant supposée finie. Entre φ et ψ existe donc la relation

$$h_1(\varphi''\psi - \psi''\varphi) + h'_1(\varphi'\psi - \psi'\varphi) = 0$$

qui donne

$$h(\varphi'\psi - \psi'\varphi) = C$$

ou

$$\psi = C\varphi \int \frac{dx}{h\varphi^2}$$

qui devient infinie pour $h = 0$.

CHAPITRE II.

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE FREDHOLM.

Je me bornerai presque exclusivement au cas d'un bassin limité par des parois verticales.

Pour plus de simplicité, je supposerai toujours le domaine qui représente sur la carte le bassin considéré, limité par un contour régulièrement analytique.

1. *Fonction de Green.* — L'application de la méthode de Fredholm à notre problème repose sur l'emploi de la fonction de Green généralisée et sur les propriétés du potentiel logarithmique de simple couche.

Nous appellerons fonction de Green $G(x, y; \xi, \eta)$ relative au domaine $\mathfrak{D}$ limité par le contour C la fonction assujettie aux conditions suivantes :

1° En tout point intérieur au domaine $\mathfrak{D}$, la fonction $G_1(x, y; \xi, \eta)$, définie par la relation

$$G_1(x, y; \xi, \eta) = \log\frac{1}{r} - G(x, y; \xi, \eta),$$

où

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

est harmonique.

2° Sur le contour, G satisfait à la relation

$$\frac{\partial G}{\partial n} - \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\frac{\partial G}{\partial s} = 0,$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$, $\frac{\partial}{\partial s}$ désignent comme précédemment les dérivées normales et tangentielles, ω la vitesse angulaire de la rotation de la Terre, θ la colatitude correspondant au point (x, y), λ la période de la fonction perturbatrice considérée.

C'est l'existence de cette fonction G qu'il s'agit d'établir tout

d'abord. Mais nous verrons plus loin qu'elle dépend elle-même de la solution du problème préliminaire suivant :

Établir l'existence d'une fonction $V(x, y)$ *harmonique en tout point intérieur au domaine* $\mathfrak{D}$ *et assujettie à vérifier, sur le contour* C, *la relation*

$$\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\frac{\partial V}{\partial s} = \chi(x, y),$$

où $\chi(x, y)$ *est une fonction donnée.*

2. *Existence de la fonction harmonique* $V(x, y)$. — Je me bornerai à indiquer la mise en équation du problème, sans donner une démonstration rigoureuse de l'existence de cette fonction.

Rappelons d'abord brièvement quelques propriétés du potentiel logarithmique de simple couche.

Soient (ξ, η) un point de la ligne attirante qui sera ici le contour, $\rho(\xi, \eta)$ une fonction continue de ξ et η, ds l'élément du contour C au point (ξ, η), (x, y) un point attiré du plan et

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2};$$

on aura pour expression du potentiel logarithmique $V(x, y)$ relatif au point (x, y), à la densité ρ et à la ligne attirante C,

$$V(x, y) = \int_C \rho(\xi, \eta) \log\frac{1}{r}\, ds' :$$

1° En tout point du plan, le potentiel est une fonction continue des variables x et y.

2° En tout point n'appartenant pas à la courbe C, V est une fonction harmonique de x, y.

3° Quand le point (x, y) se trouve sur la courbe C, l'intégrale

$$\int_C \rho(\xi, \eta) \frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial M}\, ds'$$

qui représente la dérivée de $V(x, y)$ au point (x, y), prise suivant la direction M, garde une signification précise quand la direction M

devient celle de la normale à la courbe. Elle représente alors la moyenne arithmétique des valeurs des dérivées normales, suivant les deux directions de la normale au contour : elle diffère de chacune de ces dérivées de $\pi\rho$.

Au contraire, l'intégrale considérée n'a plus de signification précise quand la direction M devient celle de la tangente à la courbe C. En effet, l'élément d'intégrale devient infini pour la valeur de s' correspondant à un point (ξ, η) du contour, confondu avec le point attiré (x, y). Pour le voir, il suffit de considérer cette intégrale qui peut s'écrire

$$\text{(T)} \qquad \int_C \rho(\xi, \eta) \frac{\sin\psi}{r} ds',$$

où ψ désigne l'angle que fait la normale intérieure au contour, menée par le point (x, y), et la demi-droite (x, y); (ξ, η). Quand le point (x, y) se confond avec le point (ξ, η), cette expression n'a plus de sens, puisqu'en ce point, $\sin\psi = 1$, $r = 0$.

Il faudra donc remplacer l'expression (T) par une autre (T') qui, tout en représentant bien la dérivée tangentielle, nous permette d'en calculer la valeur.

Pour cela, nous utiliserons cette remarque de Poincaré que la dérivée tangentielle du potentiel en un point de la ligne attirante peut encore s'exprimer par l'intégrale

$$\text{(T')} \qquad \int_C \rho(\xi, \eta) \frac{\sin\psi}{r} ds'$$

à condition d'entendre par ce symbole la limite, pour $h = 0$, de l'intégrale étendue à la courbe C moins l'arc compris entre les points $s'_0 - h$, $s'_0 + h$, en désignant par s'_0 l'abscisse curviligne sur C du point (x, y). Cette proposition se démontre facilement; il suffit de supposer que le rayon de courbure du contour reste supérieur à un nombre fixe, et que la fonction $\rho(s')$ a une dérivée. Avec ces hypothèses, la convergence uniforme de (T') vers sa limite, la dérivée tangentielle, est uniforme quel que soit le point (x, y) sur le contour.

Ceci posé, nous pouvons mettre en équation le problème qui nous occupe :

Trouver une fonction $V(x,y)$ *harmonique à l'intérieur du domaine* $\mathcal{D}$ *et satisfaisant sur son contour à la relation*

$$\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\frac{\partial V}{\partial s} = \chi(x, y), \tag{14}$$

$\chi(x, y)$ *étant une fonction dont les valeurs successives le long du contour sont données.*

Donnons à V la forme d'un potentiel logarithmique de simple couche

$$V(x, y) = \int_C \rho(\xi, \eta)\log\frac{1}{r}\,ds'.$$

Il s'agit de déterminer la fonction inconnue ρ, qui joue ici le rôle de densité, de manière que V satisfasse à la condition aux limites (14). ρ devra donc vérifier l'équation

$$\begin{aligned}(15)\qquad &\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\frac{\partial V}{\partial s}\\ &= \pi\rho(x, y) + \int_C \rho(\xi, \eta)\frac{\cos\psi + \dfrac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\sin\psi}{r}\,ds' = \chi(x, y),\end{aligned}$$

ψ désignant comme précédemment l'angle de la normale intérieure à C, au point (x,y) avec la demi-droite (x,y); (ξ, η), et le symbole $\int_C$ ayant la signification (T') déjà définie. Nous poserons pour abréger

$$\frac{2\omega\cos\theta}{\lambda} = C(x, y).$$

C'est bien une équation du type de celle de Fredholm. Mais le signe d'intégration qui y figure n'a plus le sens ordinaire. Les équations intégrales où figurent des intégrales principales de Cauchy n'ont pas été étudiées [1].

Leur théorie paraît devoir être assez différente de celle des équations ordinaires. Si, dans l'équation (15), on remplace l'intégrale le long

---

[1] Incidemment, M. Picard (*Comptes rendus*, 1910) a cependant rencontré une intégrale de ce type.

de C par celle le long de C, l'arc $(s-h, s+h)$ étant exclu, on a une équation (15 *bis*) du type de Fredholm et la question revient à l'étude de la convergence vers une limite de la solution de (15 *bis*) quand h tend vers zéro.

On peut donner un autre sens à l'équation (15), en s'appuyant sur la continuité de $\frac{\partial V}{\partial s}$ au voisinage d'un point de la simple couche. Soit C′ un contour parallèle à C et la distance h de C et convenons de substituer, dans l'équation (15), à la partie $\frac{\sin\psi}{r}$ du noyau ce qu'elle deviendrait si le point x, y était déplacé normalement à C jusqu'à venir sur C′. On obtient ainsi une équation (15 *ter*) du type exact de Fredholm; mais il y a encore à étudier la convergence de cette solution quand h tend vers zéro [1].

J'espère pouvoir reprendre prochainement l'étude de cette question.

5. *Existence de la fonction de Green.* — Le problème précédent étant résolu, je dis qu'on pourra calculer la fonction de Green $G(x, y; \xi, \eta)$ correspondant aux conditions aux limites du problème des marées.

Cette fonction G sera définie de la manière suivante :

1° En tout point (x, y) intérieur au domaine $\mathfrak{D}$, la fonction $G_1(x, y; \xi, \eta)$, définie par la relation

$$G_1(x, y; \xi, \eta) = \log\frac{1}{r} - G(x, y; \xi, \eta)$$
$$\left(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right),$$

devra être harmonique,

$$\Delta G_1 = 0;$$

2° Si le point (x, y) se trouve sur le contour, elle devra satisfaire à

---

[1] C'est aussi la convergence de la solution d'une équation de Fredhlom variable que M. Picard a étudié dans la Note citée.

l'équation

$$(16)\qquad \frac{\partial G_1}{\partial n} + C\frac{\partial G_1}{\partial s} = \frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial n} + C\frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial s} = \frac{\cos\psi}{r} + C\frac{\sin\psi}{r}.$$

C'est le problème posé au paragraphe précédent.

Posons

$$G_1 = \int_C \rho \log\frac{1}{r}\, ds',$$

ρ étant la fonction inconnue à déterminer. Dans cette égalité, G_1 dépendant de deux points, soit (x, y), (ξ, η) pour fixer les idées, ρ devra être fonction de deux points également (ξ, η), (λ, μ). r désignera alors la distance du point (x, y) au point (λ, μ) et ds' l'élément de contour au point (λ, μ).

En explicitant, nous poserons donc

$$G_1(x, y; \xi, \eta) = \int_C \rho(\lambda, \mu; \xi, \eta) \log\frac{1}{r(x, y; \lambda, \mu)}\, ds(\lambda, \mu),$$

et en portant cette valeur dans l'équation (16), nous obtiendrons

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\pi\rho(x, y; \xi, \eta) \\ &\quad + \int_C \rho(\lambda, \mu; \xi, \eta)\frac{\cos\psi(x, y; \lambda, \mu) + C(x, y)\sin\psi(x, y; \lambda, \mu)}{r(x, y; \lambda, \mu)}\, ds(\lambda, \mu) \\ &\quad = \frac{\cos\psi(x, y; \xi, \eta) + C(x, y)\sin\psi(x, y; \xi, \eta)}{r(x, y; \xi, \eta)}; \end{aligned}\right.$$

le point (x, y) étant lui-même assujetti à rester sur le contour. Nous retombons encore sur une équation du type de Fredholm, à la seule condition de remplacer l'intégrale, au voisinage du point $(x, y) = (\lambda, \mu)$, par sa valeur principale au sens de Cauchy, comme nous l'avons fait au paragraphe précédent.

4. Le problème des marées [1]. — L'existence de la fonction de

---

[1] F. Jager, *Comptes rendus Acad. Sc.*, 2 mars 1914.

Green relative à nos conditions aux limites étant ainsi établie, revenons à l'équation des marées, telle que nous l'avons obtenue au Chapitre I :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial(h_2,\varphi)}{\partial(x,y)}-\frac{\lambda^2\varphi}{gk^2}=-\frac{C e^{\lambda t}}{gk^2}$$

ou en développant et divisant par h_1 qui ne peut s'annuler, les parois étant verticales,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{1}{h_1}\left[\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}-\frac{\partial h_2}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(\frac{\partial h_1}{\partial y}+\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]-\frac{\lambda^2\varphi}{gk^2h_1}=-\frac{C e^{\lambda t}}{gk^2h_1}.$$

Pour simplifier l'écriture, nous poserons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}&=\Delta,\\
\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}-\frac{\partial h_2}{\partial y}\right)&=a,\\
\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial h_1}{\partial y}+\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)&=b,\\
\frac{\lambda^2}{gk^2h_1}&=c,\\
-\frac{C e^{\lambda t}}{gk^2h_1}&=e
\end{aligned}$$

et nous obtiendrons l'équation

$$\Delta\varphi+a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b\frac{\partial\varphi}{\partial y}+c\varphi=e, \tag{18}$$

à laquelle la fonction inconnue φ devra satisfaire en tout point intérieur au domaine $\mathfrak{D}$; sur le contour C, elle sera assujettie à la condition

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial s}=0.$$

Nous supposerons que tous les coefficients a, b, c, e sont finis et continus et ont des dérivées premières elles-mêmes finies et continues en tout point du domaine et de sa frontière. Ceci exclut en particulier le cas où le domaine serait rencontré par la latitude critique définie

par la relation

$$\lambda^2 + 4\omega^2 \cos^2\theta = 0,$$

car, en tout point vérifiant cette relation, les coefficients h_1 et h_2 deviennent infinis.

Ces hypothèses faites, et $G(x, y; \xi, \eta)$ étant la fonction de Green précédemment obtenue, considérons (¹) une fonction $\varphi(x, y)$ définie par la relation suivante

$$(19) \quad \varphi(x, y) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(D)} \left(a' \frac{\partial \varphi'}{\partial \xi} + b' \frac{\partial \varphi'}{\partial \eta} + c'\varphi' - e'\right) G(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0$$

où, dans les termes accentués, x, y doivent être remplacés par ξ, η. Cette relation peut aussi s'écrire

$$(20) \quad \varphi(x, y) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(D)} \left(a' \frac{\partial \varphi'}{\partial \xi} + b' \frac{\partial \varphi'}{\partial \eta} + c'\varphi' - e'\right) \times \left[\log \frac{1}{r} - G_1(x, y; \xi, \eta)\right] d\xi\, d\eta = 0,$$

G_1 désignant la fonction harmonique définie par la relation

$$G_1(x, y; \xi, \eta) = \log \frac{1}{r} - G(x, y; \xi, \eta).$$

Nous obtenons ainsi deux intégrales distinctes : la première est évidemment harmonique en (x, y), G_1 étant harmonique. La deuxième représente un potentiel logarithmique dont la densité serait au point (x, y)

$$\rho(x, y) = \frac{1}{2\pi}\left(a \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c\varphi - e\right).$$

Donc, en vertu de l'équation de Poisson, la fonction $\varphi(x, y)$ tirée de (18) satisfera à l'équation proposée, à condition que la densité $\rho(x, y)$ soit continue et ait des dérivées premières finies à l'intérieur de tout le domaine (D) : cela revient à montrer que $\varphi(x, y)$ a des dérivées secondes finies.

(¹) Cette méthode a été indiquée par M. E. Picard dans son Mémoire : *Sur la solution du problème général de Dirichlet* (*Ann. de l'École Normale*, 1906).

Pour résoudre cette équation (19), commençons par lui donner la forme de celle de Fredholm. Intégrons par parties; il vient

$$(21)\qquad \begin{aligned} \varphi(x,y) &+ \frac{1}{2\pi}\iint_{(D)}\left[\frac{\partial(a'G)}{\partial\xi}+\frac{\partial(b'G)}{\partial\eta}-c'G\right]\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\ &- \frac{1}{2\pi}\int_C (a'\alpha'+b'\beta')G\,\varphi(\xi,\eta)\,ds' \\ &= -\frac{1}{2\pi}\iint_{(D)} e'G\,d\xi\,d\eta, \end{aligned}$$

en désignant par α' et β' les cosinus directeurs de la normale intérieure à l'élément ds' du contour.

Faisons ici une remarque qui guidera la suite du raisonnement. Admettons pour un instant que cette équation puisse être résolue par la méthode de Fredholm, et soit φ sa solution. Pour que cette fonction φ soit également solution de (19), puis de (18), c'est-à-dire permette de remonter jusqu'à l'équation de départ et de la vérifier, quelles conditions devra-t-elle remplir?

1° Pour passer de l'équation (21) à l'équation (19), il faudra que φ tirée de (21) ait des dérivées premières finies à l'intérieur du domaine et sur son contour.

2° Pour remonter de l'équation intégrale (19) à l'équation aux dérivées (18), il faudra que la parenthèse qui, dans l'équation intégrale, joue le rôle de densité, ait des dérivées premières finies à l'intérieur du domaine. Cette parenthèse contenant elle-même les dérivées premières de φ, c'est l'existence des dérivées secondes de φ à l'intérieur du domaine qu'il faut établir.

Démontrons tout d'abord que les intégrales doubles qui figurent dans l'équation (21) ont un sens, donc que la méthode de Fredholm est bien applicable. Considérons d'abord l'intégrale double du premier membre et supposons, pour simplifier, que C soit rencontré seulement en deux points 1 et 2 par une parallèle à $O\eta$. En laissant de côté la partie voisine du point (x,y) qu'on entourera d'une petite courbe γ, on a

$$(22)\qquad \int_1^2 a'G\frac{\partial\varphi'}{\partial\xi}\,d\xi = -\int_1^2 \varphi'\frac{\partial(a'G)}{\partial\xi}\,d\xi,$$

si la droite 1, 2 ne rencontre pas γ. Si cette droite rencontre γ en deux points, 1′ et 2′, on prendra l'intégrale sur les deux segments 1 1′, 2′2 et le second membre de (22) sera remplacé par

$$-\int_1^{1'} \varphi' \frac{\partial(a'G)}{\partial\xi} d\xi - \int_{2'}^{2} \frac{\partial(a'G)}{\partial\xi} d\xi + (a'G\varphi')_{1'} - (a'G\varphi')_{2'}.$$

Donc, pour l'aire comprise entre C et γ, on aura

$$\iint_{C-\gamma} a'G \frac{\partial\varphi'}{\partial\xi} d\xi\, d\eta = -\int_\gamma a'G\varphi'\, d\eta - \iint_{C-\gamma} \varphi' \frac{\partial(a'G)}{\partial\xi} d\xi\, d\eta.$$

Supposons que γ soit un cercle de rayon ρ. En posant

$$\eta = \rho\cos\theta,$$

on voit immédiatement que l'intégrale simple tend vers $\rho\log\rho$ pour $\rho = 0$, donc qu'elle est nulle à la limite. Donc les intégrales doubles resteront finies.

De même, l'élément de l'intégrale de ligne

$$-\frac{1}{2\pi}\int_C (a'\alpha' + b'\beta')G\varphi'\, ds',$$

figurant aussi dans l'équation (21), n'aura qu'une singularité logarithmique : donc cette intégrale a toujours un sens.

Suivant la remarque de Fredholm, on pourra, en itérant le noyau, obtenir une nouvelle équation équivalente à l'ancienne et qui ne présentera plus de singularité. Le noyau itéré comprendra quatre parties : une intégrale quadruple, deux intégrales triples et une intégrale double.

Posons

$$f(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial(a'G)}{\partial\xi} + \frac{\partial(b'G)}{\partial\eta} - c'G\right],$$

$$g(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}(a'\alpha' + b'\beta')G.$$

L'intégrale quadruple aura la forme

$$\iint_{\mathfrak{D}}\left[\iint_{\mathfrak{D}} f(x, y; u, v) f(u, v; w, z)\, du\, dv\right]\varphi(w, z)\, dw\, dz.$$

Dans cette intégrale, considérons le noyau itéré

$$\iint_{\mathfrak{D}} f(x, y; u, v) f(u, v; w, z)\, du\, dv.$$

C'est une fonction de (x, y), (w, z) mais qui n'aura évidemment plus de pôle pour $(x, y) = (w, z)$. Donc cette partie du noyau aura des dérivées premières finies. On raisonnerait de même sur les deux intégrales triples et sur l'intégrale double, qui s'étendent au contour C lui-même. Donc le noyau itéré tout entier a des dérivées finies même sur le bord.

Quant aux termes tout connus, on peut les écrire avec les notations précédentes

$$(23)\quad \iint_{\mathfrak{D}} f(x, y; \xi, \eta)\chi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \int_{C} g(x, y; \xi, \eta)\chi(\xi, \eta)\, ds' + \chi(x, y),$$

en posant

$$\chi(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathfrak{D}} e' G\, d\xi\, d\eta.$$

Nous avons supposé que e avait des dérivées premières dans tout le domaine et sur sa frontière : χ aura donc des dérivées comme un potentiel logarithmique. En intégrant par parties le premier terme de (23), on obtiendra des expressions de la forme

$$\iint_{\mathfrak{D}} \frac{\partial(a' G)}{\partial \xi}\chi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = -\iint_{\mathfrak{D}} a' G \frac{\partial \chi}{\partial \xi}\, d\xi\, d\eta - \int_{C} a' \chi(\xi, \eta) G\, ds'.$$

Or le premier de ces derniers termes aura des dérivées premières finies même sur le bord et des dérivées secondes à l'intérieur du domaine puisque χ a des dérivées secondes et a, b des dérivées premières; et le second terme est un potentiel logarithmique de simple couche de densité $a\chi$. Quant au deuxième terme de (23), il est également assimilable à un potentiel.

Nous avons ainsi démontré l'existence des dérivées premières, à l'intérieur de $\mathfrak{D}$ et sur C, de la fonction φ tirée de l'équation itérée, équivalente à (21).

Ce résultat permet donc d'affirmer que toute solution de (21) sera aussi solution de (19).

Enfin, pour démontrer que toute solution de (19) satisfait à l'équation proposée (18), il faut encore établir que φ, tirée de l'équation itérée, a des dérivées secondes à l'intérieur de $\mathfrak{D}$. Mais cela résulte immédiatement de ce qui précède : nous venons de voir que tous les termes indépendants de φ ont des dérivées secondes; et tous les termes contenant φ sont assimilables à des potentiels logarithmiques et ont des dérivées secondes puisqu'on sait déjà que φ, qui joue ici le rôle de densité, a des dérivées premières.

La proposition suivante est donc établie :

L'équation de Fredholm (21) *donne bien la solution du problème des marées.*

Il reste à préciser dans quelles conditions cette équation (21) aura une solution.

Elle aura toujours une solution unique, continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, et vérifiant sur le contour les conditions aux limites du problème, sauf si $\mu = 1$ est une valeur singulière du paramètre μ pour l'équation

$$\Delta\varphi + \mu\left(a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{dy} + c\varphi\right) = e. \tag{24}$$

Or ces valeurs singulières de μ sont les racines de la fonction entière en μ, associée à l'équation suivante de Fredholm

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &+ \frac{\mu}{2\pi}\iint_{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial(a'G)}{\partial\xi} + \frac{\partial(b'G)}{\partial\eta} - c'G\right]\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\ &- \frac{\mu}{2\pi}\int_{C}(a'\alpha' + b'\beta')G\,\varphi(\xi,\eta)\,ds' \\ &= -\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathfrak{D}} e'G\,d\xi\,d\eta.\end{aligned} \tag{25}$$

Ces valeurs sont aussi celles pour lesquelles l'équation (24), mais sans second membre, aura une solution non identiquement nulle.

Mais l'équation (24) sans second membre, dans laquelle on fait $\mu = 1$, est précisément celle qui détermine la période des oscillations propres du bassin considéré. Voici d'ailleurs comment on pourra obtenir les oscillations propres du système.

Quand il s'agissait d'oscillations contraintes, λ, période de l'oscillation contrainte, était une donnée du problème. Pour les oscillations propres, λ est l'inconnue. Pour la calculer, reprenons la fonction $D(\mu, \lambda)$, entière en μ, associée à (25) : cette fonction est aussi une fonction entière en λ pour le problème qui nous occupe.

En effet, dans nos équations, les coefficients a, b, c, e peuvent être considérés comme des polynomes entiers en λ : il en sera donc de même du noyau tout entier. En développant la fonction $D(\mu, \lambda)$ suivant les puissances de μ, le coefficient S_n de μ_n satisfait à l'inégalité

$$S_n < \frac{M^n}{\sqrt{n!}},$$

M désignant le maximum du module du noyau. On a donc

$$S_n < \frac{A_n \lambda^{np}}{\sqrt{n!}}.$$

S_n est donc une fonction entière en λ; donc aussi $D(\mu, \lambda)$. En faisant dans cette dernière $\mu = 1$ et en l'égalant à zéro, on obtiendra toutes les valeurs de λ satisfaisant à notre équation sans second membre, c'est-à-dire les périodes de toutes les oscillations propres du système.

Donc notre méthode donne bien la solution du problème des marées, sauf si la période de l'oscillation contrainte donnée coïncide avec celle d'une oscillation propre du bassin, c'est-à-dire sauf au cas de résonance.

5. *Cas des parois inclinées.* — Nous nous bornerons à étudier sommairement le cas très particulier où l'on néglige la force centrifuge composée et où la relation

$$\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

est satisfaite sur le contour.

Dans ce cas, l'équation peut s'écrire

$$\Delta(h\varphi) + m\varphi = n.$$

Posons

$$h\varphi = \psi$$

et cherchons la solution de

$$\Delta\psi + \frac{m}{h}\psi = n,$$

nulle au bord. Nous obtiendrons une équation de Fredholm, dont le noyau pourra devenir infini comme $\frac{1}{r \log r}$ pour $r = 0$. Donc en itérant le noyau, on pourra raisonner comme précédemment et obtenir ainsi pour φ une fonction restant finie sur le bord.

Le cas général nécessite un changement dans le chemin d'intégration et nous ne le traiterons pas ici.

CHAPITRE III.

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE RITZ.

L'application de cette méthode comprend essentiellement les trois points suivants :

1° Réduction du problème des marées à un problème du calcul des variations;

2° Démonstration de la convergence en moyenne des fonctions minimisantes;

3° Identification des fonctions minimisantes et de la solution du problème.

Ici encore, nous n'étudierons que le cas d'un bassin limité par des parois verticales et n'ayant avec la latitude critique aucun point commun.

1. *Le problème du calcul des variations.* — Rappelons l'équation générale de notre problème, et la signification de ses divers coefficients.

A l'intérieur du domaine $\mathfrak{D}$, la fonction inconnue $\varphi(x,y)$ devait satisfaire à l'équation suivante :

$$(26)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(h_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial(h_2,\varphi)}{\partial(x,y)}-\frac{\lambda^2\varphi}{gk^2}=-\frac{Ce^{\lambda t}}{gk^2},$$

où

$$h_1=\frac{\lambda^2 h}{\lambda^2+4\omega^2\cos^2\theta},$$

$$h_2=\frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}h_1.$$

h est la profondeur, quantité essentiellement réelle; λ, période de l'oscillation contrainte considérée, est purement imaginaire; ω désigne la vitesse de rotation de la Terre; θ, la colatitude. Il en résulte que h_1 représente une quantité réelle et h_2 une quantité purement imaginaire.

Enfin g désigne l'accélération due à la pesanteur à la surface d'équilibre des mers, k^2 est le rapport de similitude d'un élément du bassin à l'élément correspondant de la carte; C, une fonction donnée de x et y.

Sur le contour, la fonction φ est assujettie à la condition

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial s}=0.$$

Cela étant rappelé, pour obtenir la forme cherchée, séparons les parties réelles et les parties imaginaires (nous verrons plus loin que cette séparation est nécessaire dans le cas général) et posons

$$\varphi=\varphi_1+i\varphi_2,$$
$$h_2=i\eta,$$
$$Ce^{\lambda t}=C_1+iC_2.$$

L'équation (26) équivaut alors aux deux suivantes :

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(h_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)+\frac{\partial(\varphi_2,\eta)}{\partial(x,y)}-\frac{\lambda^2\varphi_1}{gk^2}+\frac{C_1}{gk^2}=0,\\&\frac{\partial}{\partial x}\left(h_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)-\frac{\partial(\varphi_1,\eta)}{\partial(x,y)}-\frac{\lambda^2\varphi_2}{gk^2}+\frac{C_2}{gk^2}=0,\end{aligned}\right.$$

et la condition aux limites donne

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}+i\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}+i\frac{\partial\varphi_2}{\partial s}\right)=0,$$

ou, λ étant purement imaginaire,

$$(28)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}+\dfrac{2\omega\cos\theta}{i\lambda}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial s}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\dfrac{2\omega\cos\theta}{i\lambda}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial s}=0.\end{cases}$$

Multiplions respectivement ces deux équations (27) par $\delta\varphi_1\,dx\,dy$, $\delta\varphi_2\,dx\,dy$, ajoutons et intégrons par rapport à x et y dans tout le domaine $\mathfrak{D}$ considéré; cette intégrale devra évidemment être nulle.

Nous allons établir que cette intégrale se réduit à la variation exacte d'une autre intégrale : et la recherche du maximum (ou du minimum) de cette dernière constituera un problème équivalent à l'ancien.

Transformons successivement chaque terme, au moyen d'intégrations par parties, de manière à obtenir des variations exactes, sans nous préoccuper pour l'instant des intégrales de ligne que nous introduirons.

Les deux premiers termes de la première équation (27) donneront

$$\begin{aligned}&\int\int_{(\mathfrak{D})}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)\right]\delta\varphi_1\,dx\,dy\\ &\quad=-\int\int_{(\mathfrak{D})}h_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\,\delta\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\,\delta\varphi_1}{\partial y}\right)dx\,dy+\int_{\mathrm{C}}h_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}dy-\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}dx\right)\delta\varphi_1.\end{aligned}$$

La même transformation s'applique pour les termes analogues de la deuxième équation.

L'ensemble des termes provenant des déterminants fonctionnels pourra s'écrire

$$\begin{aligned}\int\int_{(\mathfrak{D})}\Bigg[&\delta\varphi_1\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)-\delta\varphi_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)-\delta\varphi_2\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)\\ &+\delta\varphi_2\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)\Bigg]dx\,dy\end{aligned}$$

et, en intégrant par parties, on obtiendra une intégrale double

$$\int\int_{(\Omega)} \eta\left(-\frac{\partial\,\delta\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\frac{\partial\,\delta\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\,\delta\varphi_2}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial\,\delta\varphi_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

qui est une variation exacte

$$\delta\int\int_{(\Omega)} \eta\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)dx\,dy=\delta\int\int_{(\Omega)} \eta\,\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x,y)}\,dx\,dy$$

et des intégrales de ligne

$$\int_C \eta\left(-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\,\delta\varphi_1\,dx-\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\,\delta\varphi_1\,dy+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\,\delta\varphi_2\,dx+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\,\delta\varphi_2\,dy\right).$$

Dans toutes les intégrales de ligne que nous avons introduites, mettons en évidence les coefficients de $\delta\varphi_1$ et $\delta\varphi_2$. En se rappelant que

$$\eta=\frac{2\omega\cos\theta}{i\lambda}h_1,$$

les intégrales de ligne deviennent

$$\int_C\Bigg\{\quad h_1\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}dy-\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}dx-\frac{2\omega\cos\theta}{i\lambda}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}dy\right)\right]\delta\varphi_1$$
$$+h_1\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}dy-\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}dx+\frac{2\omega\cos\theta}{i\lambda}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}dy\right)\right]\delta\varphi_2\Bigg\}.$$

Chacun des deux crochets étant nul tout le long du bord en vertu des relations (28), les intégrales de ligne sont donc toutes nulles.

Quant aux derniers termes des équations (27), leur transformation est immédiate. Les termes en φ_1 et φ_2 se réduisent à une variation exacte

$$\delta\int\int_{(\Omega)} -\frac{\lambda^2}{2gh^2}(\varphi_1^2+\varphi_2^2)\,dx\,dy,$$

et les termes tous connus, n'ayant pas de variation, donnent

$$\delta\int\int_{(\Omega)} \frac{1}{gh^2}(C_1\varphi_1+C_2\varphi_2)\,dx\,dy.$$

Donc, avec les conditions aux limites du problème, tout système de solutions des équations (27) devra annuler la variation première de

l'intégrale suivante, que nous appellerons pour abréger *intégrale de Poincaré*,

$$J = \int\int_{(D)} \left\{ -\frac{h_1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2\right] \right.$$
$$\left. + r_1 \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2}{2gk^2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{1}{gk^2}(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2) \right\} dx\, dy.$$

Il peut être intéressant de rechercher à quelle condition l'équation proposée est équivalente à la variation exacte d'une intégrale ne dépendant que de φ; ou, en d'autres termes, quand la séparation des parties réelles et imaginaires est nécessaire. Nous supposerons toujours que les coefficients des dérivées secondes ne peuvent s'annuler dans le domaine considéré.

Considérons d'abord le cas d'une équation différentielle ordinaire du second ordre

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f,$$

où a, b, c, f sont des fonctions données de x. Supposons qu'on cherche la solution telle que

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1} = 0.$$

Multiplions l'équation par $\delta y\, dx$ et intégrons de x_0 à x_1

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(a\frac{d^2y}{dx^2}\delta y + b\frac{dy}{dx}\delta y + cy\,\delta y - f\,\delta y\right)dx = 0.$$

Les deux derniers termes sont des variations exactes et, en intégrant par parties le premier, il vient

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(-\frac{dy}{dx}\frac{da\,\delta y}{dx} + b\frac{dy}{dx}\delta y + cy\,\delta y - f\,\delta y\right)dx = 0$$

ou

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(-a\frac{dy}{dx}\frac{d\,\delta y}{dx} - \frac{da}{dx}\frac{dy}{dx}\delta y + b\frac{dy}{dx}\delta y + cy\,\delta y - f\,\delta y\right)dx = 0,$$

et le premier terme étant une variation exacte, il faudra que le coefficient de δy soit nul, c'est-à-dire

$$b = \frac{da}{dx}.$$

Je dis que cette condition peut toujours être remplie. Récrivons, en effet, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{b}{a}\frac{dy}{dx} + \frac{c}{a}y = \frac{f}{a}.$$

Posons

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{A}\frac{dA}{dx}$$

et, par une simple quadrature,

$$A = e^{\int \frac{b}{a} dx}.$$

En remplaçant $\frac{b}{a}$ par sa valeur dans l'équation, on obtient donc la forme cherchée.

Revenons à l'équation générale aux dérivées partielles, du type elliptique

$$a\,\Delta\varphi + b\frac{\partial\varphi}{\partial x} + c\frac{\partial\varphi}{\partial y} + e\varphi = f,$$

où a, b, c, e, f sont des fonctions données de x, y et où a ne peut s'annuler dans le domaine considéré. En supposant les conditions aux limites telles que les intégrales de ligne, introduites par l'intégration par parties, soient nulles, en multipliant par $\delta\varphi\,dx\,dy$ et intégrant dans le domaine Θ, on trouverait comme précédemment

$$\iint_{\Theta}\Big[-a\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\,\delta\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\,\delta\varphi}{\partial y}\Big)$$
$$-\Big(\frac{\partial a}{\partial x} - b\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta\varphi - \Big(\frac{\partial a}{\partial y} - c\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta\varphi + e\varphi\,\delta\varphi - f\,\delta\varphi\Big]\,dx\,dy = 0,$$

et il faudrait que l'on ait

$$\frac{\partial a}{\partial x} = b,$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = c.$$

Écrivons comme précédemment

$$\Delta\varphi + \frac{b}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{c}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{e}{a}\varphi = \frac{f}{a}.$$

En posant

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x},$$
$$\frac{c}{a} = \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y},$$

on obtiendra encore A par quadrature

$$A = e^{\int \frac{b}{a} dx} = e^{\int \frac{c}{a} dy};$$

mais il faudra évidemment que l'on ait

$$\frac{\partial\left(\frac{b}{a}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{c}{a}\right)}{\partial x}.$$

Telle est la relation qui doit exister entre les trois coefficients a, b, c pour que l'intégrale en φ soit une variation exacte. Appliquons ce résultat à l'équation des marées. Nous obtiendrons la condition

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{\partial h_2}{\partial y}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial h_2}{\partial x}\right)\right],$$

où h_1 et h_2 ne dépendent que de la colatitude $\theta(x, y)$ et, linéairement, de la profondeur $h(x, y)$.

Cette relation sera toujours vérifiée si l'on néglige la force centrifuge composée, car dans ce cas h_2 est nulle. Mais elle ne le sera évidemment pas dans le cas général.

2. *Définitions des* ψ, *de* φ_m *et de* J_m. — Nous venons de voir que le problème des marées se ramenait à la recherche du minimum (ou du maximum) d'une certaine intégrale J que nous avons appelée *intégrale de Poincaré*. Il s'agit de trouver la fonction qui « minimisera » cette intégrale J. Nous nous servirons pour cela de la méthode de Ritz. On sait qu'elle consiste à remplacer la fonction inconnue φ par une série de fonctions arbitrairement choisies, dont on détermine les coefficients, indépendants de x et y, de façon à annuler la variation première de l'intégrale J.

Soient donc

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_m, \quad \ldots$$

une suite illimitée de fonctions réelles de x et y, et

$$\begin{array}{llll} a_1, & a_2, & \ldots, & a_m, \quad \ldots, \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_m, \quad \ldots \end{array}$$

des nombres actuellement indéterminés. Nous poserons

$$\varphi_{1,m} = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_m\psi_m,$$
$$\varphi_{2,m} = b_1\psi_1 + b_2\psi_2 + \ldots + b_m\psi_m$$

et nous assujettirons les fonctions ψ aux conditions suivantes :

1° Elles sont déterminées, finies et continues ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres dans le domaine $\mathfrak{D}$ et sur sa frontière.

2° Les conditions aux limites du problème doivent être remplies par $\varphi_{1,m}$ et $\varphi_{2,m}$, quels que soient les nombres $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$,

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_i \frac{\partial\psi_i}{\partial n} + \frac{2\omega\cos\theta}{i\lambda} \sum_{i=1}^{i=m} b_i \frac{\partial\psi_i}{\partial s} = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{i=m} b_i \frac{\partial\psi_i}{\partial n} - \frac{2\omega\cos\theta}{i\lambda} \sum_{i=1}^{i=m} a_i \frac{\partial\psi_i}{\partial s} = 0,$$

ce qui entraîne la condition

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial n} = \frac{\partial\psi_i}{\partial s} = 0$$

en tout point du contour.

3° Enfin, nous serons obligés de supposer que la relation

$$\iint_{\mathfrak{D}} \eta \frac{\partial(\psi_i, \psi_j)}{\partial(x, y)} dx\, dy = 0$$

est satisfaite pour toutes valeurs des indices i, j. En particulier, on pourra y satisfaire en supposant que

$$\iint_{\mathfrak{D}} \eta \frac{\partial\psi_i}{\partial x} \frac{\partial\psi_j}{\partial y} dx\, dy = 0$$

quels que soient i, j sauf pour $i = j$.

Posons enfin

$$J_m = \iint_{\mathfrak{D}} \left\{ -\frac{h_1}{2} \left[\left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_{2,m}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_{2,m}}{\partial y}\right)^2 \right] \right.$$
$$\left. + \eta \frac{\partial(\varphi_{1,m}, \varphi_{2,m})}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2}{2gh_2}(\varphi_{1,m}^2 + \varphi_{2,m}^2) + \frac{1}{gh^2}(C_1\varphi_{1,m} + C_2\varphi_{2,m}) \right\} dx\, dy.$$

et cherchons à déterminer les paramètres a_i et b_i de façon à rendre l'intégrale J_m minima.

Comme J_m est une fonction du second degré des paramètres a_i, b_i et ne dépend pas de x, y, nous n'avons qu'à résoudre le système linéaire en a_i et b_i, à coefficients constants, des $2m$ équations suivantes :

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial J_m}{\partial a_n} &= \int\int_{(D)} \left[-h_1\left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial x}\frac{\partial \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial y}\frac{\partial \psi_n}{\partial y}\right) \right. \\ &\qquad \left. + \eta_1 \frac{\partial(\psi_n, \varphi_{2,m})}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2}{gk^2}\varphi_{1,m}\psi_n + \frac{C_1}{gk^2}\psi_n \right] dx\,dy = 0, \\ \frac{\partial J_m}{\partial b_n} &= \int\int_{(D)} \left[-h_1\left(\frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial x}\frac{\partial \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial y}\frac{\partial \psi_n}{\partial y}\right) \right. \\ &\qquad \left. + \eta_1 \frac{\partial(\varphi_{1,m}, \psi_n)}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2}{gk^2}\varphi_{2,m}\psi_n + \frac{C_2}{gk^2}\psi_n \right] dx\,dy = 0 \\ &\qquad\qquad (n = 1, 2, \ldots, m); \end{aligned}\right.$$

ou, en posant,

$$\alpha_{i,j} = \int\int_{(D)} \left[-h_1\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right) - \frac{\lambda^2}{gk^2}\psi_i\psi_j \right] dx\,dy,$$

$$\beta_{i,j} = \int\int_{(D)} \eta_1 \frac{\partial(\psi_i, \psi_j)}{\partial(x, y)}\,dx\,dy,$$

$$-\gamma_{1,n} = \int\int_{(D)} \frac{C_1}{gk^2}\psi_n\,dx\,dy,$$

$$-\gamma_{2,n} = \int\int_{(D)} \frac{C_2}{gk^2}\psi_n\,dx\,dy,$$

il vient

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{j=m} a_j\alpha_{j,n} - \sum_{j=1}^{j=m} b_j\beta_{j,n} &= \gamma_{1,n} \\ \sum_{j=1}^{j=m} a_j\beta_{j,n} + \sum_{j=1}^{j=m} b_j\alpha_{j,n} &= \gamma_{2,n} \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots, m).$$

Pour que ce système admette un système de solutions non identiquement nulles, il faut que le déterminant des coefficients α et β soit différent de zéro.

Mais dans le cas des oscillations propres, ce sont précisément les racines en λ de ce déterminant qui déterminent la période de ces

oscillations. Comme nous ne nous occupons ici que des oscillations contraintes, où λ est une donnée du problème, et que de plus nous supposons qu'il n'y a pas résonance, notre déterminant sera toujours différent de zéro.

Ce déterminant permet de retrouver des résultats que M. Poincaré avait obtenus par une autre voie.

Si l'on change λ en $-\lambda$ dans ce déterminant, on se rend compte facilement que les coefficients α ne changent pas tandis que les coefficients β changent de signe : donc le déterminant lui-même ne change pas. Donc, si λ est une période d'oscillation propre, $-\lambda$ le sera aussi.

Enfin, ce déterminant est une fonction entière en λ : la multiplicité des racines en λ reste finie. Pour le voir on appliquera la méthode qui sert à Poincaré pour l'étude des systèmes finis de points (*Théorie des marées*, Chap. I).

Avant d'aller plus loin, donnons au système (29) une forme différente qui nous servira dans un moment. Soient

$$\begin{matrix} A_1, & A_2, & \ldots, & A_m, \\ B_1, & B_2, & \ldots, & B_m \end{matrix}$$

des nombres arbitraires. Posons

$$\zeta_{1,m}(x, y) = A_1\psi_1 + A_2\psi_2 + \ldots + A_m\psi_m,$$
$$\zeta_{2,m}(x, y) = B_1\psi_1 + B_2\psi_2 + \ldots + B_m\psi_m.$$

En multipliant chacune des équations (29) respectivement par les quantités A_i et B_i et ajoutant, ce système (29) se résume dans les deux équations suivantes :

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\iint_{(D)} \Big[-h_1\left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{\partial x}\frac{\partial\zeta_{1,m}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_{1,m}}{\partial y}\frac{\partial\zeta_{1,m}}{\partial y}\right) \\ &\qquad + \eta\frac{\partial(\zeta_{1,m}\varphi_{2,m})}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2}{gk^2}\varphi_{1,m}\zeta_{1,m} + \frac{C_1}{gk^2}\zeta_{1,m}\Big]\,dx\,dy = 0, \\ &\iint_{(D)} \Big[-h_1\left(\frac{\partial\varphi_{2,m}}{\partial x}\frac{\partial\zeta_{2,m}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_{2,m}}{\partial y}\frac{\partial\zeta_{2,m}}{\partial y}\right) \\ &\qquad + \eta\frac{\partial(\varphi_{1,m}\zeta_{2,m})}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2}{gk^2}\varphi_{2,m}\zeta_{2,m} + \frac{C_1}{gk^2}\zeta_{2,m}\Big]\,dx\,dy = 0. \end{aligned}\right.$$

3. *Définition de* J_m^0. — Le système (30) peut s'écrire, en y faisant

$$\zeta_{1,m} = \varphi_{1,m},$$
$$\zeta_{2,m} = \varphi_{2,m},$$

c'est-à-dire en particularisant les coefficients arbitraires de $\zeta_{1,m}$, $\zeta_{2,m}$:

$$\iint_{(D)} \left\{ -h_1 \left[\left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial y} \right)^2 \right] + \eta \frac{\partial(\varphi_{1,m}\varphi_{2,m})}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2}{gk^2} \varphi_{1,m}^2 + \frac{C_1}{gk^2} \varphi_{1,m} \right\} dx\, dy = 0,$$

$$\iint_{(D)} \left\{ -h_1 \left[\left(\frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial y} \right)^2 \right] + \eta \frac{\partial(\varphi_{1,m}\varphi_{2,m})}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2}{gk^2} \varphi_{2,m}^2 + \frac{C_2}{gk^2} \varphi_{2,m} \right\} dx\, dy = 0.$$

Ces deux équations nous donnent donc pour valeurs de

$$\iint_{(D)} \frac{C_1}{gk^2} \varphi_{1,m}\, dx\, dy$$

et de

$$\iint_{(D)} \frac{C_2}{gk^2} \varphi_{2,m}\, dx\, dy$$

deux intégrales dont les éléments sont des formes quadratiques des fonctions $\varphi_{1,m}$, $\varphi_{2,m}$ et de leurs dérivées premières. Portons ces valeurs dans l'intégrale J_m qu'il s'agit de *minimiser*. Nous obtiendrons ainsi une nouvelle intégrale J_m^0, dite *minimisée* et dont l'élément sera une forme quadratique des fonctions $\varphi_{1,m}$, $\varphi_{2,m}$ et de leurs dérivées premières

$$J_m^0 = \iint_{(D)} \left\{ \frac{h_1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial y} \right)^2 \right] - \eta \frac{\partial(\varphi_{1,m}\varphi_{2,m})}{\partial(x, y)} + \frac{\lambda^2}{2gk^2} (\varphi_{1,m}^2 + \varphi_{2,m}^2) \right\} dx\, dy.$$

Cette intégrale J_m^0 n'est autre que la valeur de J_m après la détermination des $2m$ coefficients de $\varphi_{1,m}$ et $\varphi_{2,m}$.

Avant d'étudier la convergence de ces intégrales J_m^0, il faut les assujettir à garder un signe constant.

4. *Le signe de* J_m^0. — Remarquons que J_m^0 peut s'écrire de la manière suivante :

$$\iint_{(D)} \left\{ \frac{h_1 - \eta}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial y} \right)^2 \right] \right.$$
$$+ \frac{\eta}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial x} \right)^2 \right]$$
$$\left. + \frac{\lambda^2}{2gk^2} (\varphi_{1,m}^2 + \varphi_{2,m}^2) \right\} dx\, dy.$$

λ étant purement imaginaire, le dernier terme sera toujours négatif. Si donc on pouvait avoir

$$h_1 - \eta < 0,$$
$$\eta < 0,$$

la forme serait toujours définie négative. Mais en remplaçant η et h_1 par leurs valeurs et en effectuant le calcul, on aboutit à une contradiction.

On peut cependant trouver des conditions suffisantes pour que cette intégrale garde un signe constant. Pour cela, je supposerai que les conditions suivantes sont remplies

$$(31) \qquad \begin{cases} h_1 - \eta > 0, \\ \eta > 0. \end{cases}$$

En les explicitant, deux cas seront à distinguer :

1° Si $2\omega \cos\theta < 0$ (hémisphère austral), il faudra que

$$i\lambda < 0$$

et

$$i\lambda < \min 2\omega \cos\theta.$$

2° Si $2\omega \cos\theta > 0$ (hémisphère boréal), il faudra que

$$i\lambda > 0$$

et

$$i\lambda > \max 2\omega \cos\theta.$$

C'est donc encore la latitude critique

$$\lambda^2 + 4\omega^2 \cos^2\theta = 0$$

qui s'introduit ici.

Ces conditions supposées remplies, je dis que l'intégrale aura un signe constant.

Remarquons d'abord que η étant positif, le deuxième crochet de l'intégrale J_m^0 le sera également. Il nous suffira donc d'établir que

$$\iint_{\mathfrak{D}} \left\{ \frac{h_1 - \eta}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\lambda^2}{2gk^2} \varphi_{1,m}^2 \right\} dx\, dy > 0,$$

$$\iint_{\mathfrak{D}} \left\{ \frac{h_1 - \eta}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\lambda^2}{2gk^2} \varphi_{2,m}^2 \right\} dx\, dy > 0,$$

ou en posant

$$\frac{h_1 - \eta}{2} = a^2,$$

$$\frac{\lambda^2}{2gk^2} = -b^2,$$

a et b désignant des quantités réelles,

$$\iint_{\mathfrak{D}} \left\{ a^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial y} \right)^2 \right] - b^2 \varphi_{1,m}^2 \right\} dx\, dy > 0.$$

Il suffira donc que

$$\iint_{\mathfrak{D}} \left[\left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial y} \right)^2 - \frac{b^2}{a^2} \varphi_{1,m}^2 \right] dx\, dy > 0.$$

Divisons notre domaine $\mathfrak{D}$ en petits rectangles $\mathfrak{R}$, par des parallèles aux axes de coordonnées, pour fixer les idées. Notre intégrale deviendra une somme d'intégrales de mêmes formes, mais étendues à chacun des petits rectangles $\mathfrak{R}$.

On sait que, pour un domaine suffisamment petit, on a, d'après un lemme connu de Poincaré [1],

$$\iint_{\mathfrak{R}} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial y} \right)^2 - \frac{24}{7l^2} \varphi_{1,m}^2 \right\} dx\, dy > 0,$$

l désignant la plus grande dimension du domaine $\mathfrak{R}$. Il suffira donc

---

[1] Poincaré, *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Rendiconti del Circ. mat. di Palermo*, 1894).

qu'on ait

$$\max \frac{b^2}{a^2} < \frac{24}{7\,l^2},$$

ce qui est toujours possible, en prenant l assez petit, les dimensions de chacun des petits rectangles étant arbitraires.

Le lemme de Poincaré suppose que

$$\int\int_{\mathfrak{R}} \varphi_{1,m}\, dx\, dy = 0.$$

Il faudrait donc, dans cette méthode, assujettir les fonctions ψ à vérifier les relations

$$(32) \qquad \int\int_{\mathfrak{R}} \psi_i\, dx\, dy = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m, \ldots),$$

quel que soit celui des rectangles $\mathfrak{R}$ envisagé.

Il est bien évident qu'au lieu de rectangles on pourrait choisir n'importe quel autre mode de subdivision.

Donc, en supposant les conditions (31) remplies et les ψ assujettis à vérifier les relations (32), l'intégrale J_m^0 restera toujours positive.

5. *Convergence de* J_m^0. — L'intégrale J_m^0 étant supposée positive, posons

$$\Phi_1 = \varphi_{1,m+n} - \varphi_{1,m},$$
$$\Phi_2 = \varphi_{2,m+n} - \varphi_{2,m}$$

et formons la différence des valeurs non minimisées de J

$$\begin{aligned}
J_{m+n} - J_m = \int\int_{(D)} \Bigg\{ & \frac{-h_1}{2}\Bigg[\left(\frac{\partial(\varphi_{1,m}+\Phi_1)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\varphi_{2,m}+\Phi_2)}{\partial x}\right)^2 \\
& + \left(\frac{\partial\varphi_{1,m}+\Phi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\varphi_{2,m}+\Phi_2)}{\partial y}\right)^2\Bigg] + \eta\,\frac{\partial(\varphi_{1,m}+\Phi_1,\ \varphi_{2,m}+\Phi_2)}{\partial(x,y)} \\
& - \frac{\lambda^2}{2gk^2}\left[(\varphi_{1,m}-\Phi_1)^2 + (\varphi_{2,m}+\Phi_2)^2\right] \\
& + \frac{1}{gk^2}\left[C_1(\varphi_{1,m}+\varphi_1) + C_2(\varphi_{2,m}+\Phi_2)\right] \\
& + \frac{h_1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_{2,m}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_{2,m}}{\partial y}\right)^2\right] - \eta\,\frac{\partial(\varphi_{1,m},\ \varphi_{2,m})}{\partial(x,y)} \\
& + \frac{\lambda^2}{2gk^2}(\varphi_{1,m}^2 + \varphi_{2,m}) - \frac{1}{gk^2}(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2)\Bigg\}\, dx\, dy.
\end{aligned}$$

Or, les équations (30) s'écrivent, pour l'indice $m+n$,

$$\iint_{(\mathfrak{D})} \Big\{ -h_1 \left[\left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial \zeta_{1,m+n}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right) \frac{\partial \zeta_{1,m+n}}{\partial y} \right] + \eta \frac{\partial [\zeta_{1,m+n}, (\varphi_{2,m} + \Phi_2)]}{\partial (x, y)} - \frac{\lambda^2}{gk^2} (\varphi_{1,m} + \Phi_1) \zeta_{1,m+n} + \frac{C_1}{gk^2} \zeta_{1,m+n} \Big\} dx\, dy = 0,$$

$$\iint_{(\mathfrak{D})} \Big\{ -h_1 \left[\left(\frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right) \frac{\partial \zeta_{2,m+n}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right) \frac{\partial \zeta_{2,m+n}}{\partial y} \right] + \eta \frac{\partial [(\varphi_{1,m} + \Phi_1), \zeta_{2,m+n}]}{\partial (x, y)} - \frac{\lambda^2}{gk^2} (\varphi_{2,m} + \Phi_2) \zeta_{2,m+n} + \frac{C_2}{gk^2} \zeta_{2,m+n} \Big\} dx\, dy = 0.$$

Dans ces dernières expressions, faisons

$$\zeta_{1,m+n} = \Phi_1,$$
$$\zeta_{2,m+n} = \Phi_2.$$

ce qui est possible, puisque les ζ ont des coefficients arbitraires et sont de l'ordre de $m+n$. En tenant compte des relations ainsi obtenues dans l'expression de $J_{m+n} - J_m$, nous minimisons ces intégrales, et nous pourrons écrire, après réductions,

$$J^0_{m+n} - J^0_m = \iint_{(\mathfrak{D})} \Big\{ -\frac{h_1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)^2 \right] + \eta \frac{\partial (\Phi_1, \Phi_2)}{\partial (x, y)} - \frac{\lambda^2}{2gk^2} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \Big\} dx\, dy.$$

Mais avec les hypothèses faites au paragraphe précédent, cette intégrale reste toujours négative,

$$J^0_{m+n} - J^0_m < 0$$

et J^0_m restant positive, quel que soit m, à tout nombre ε_m donné à l'avance, on peut faire correspondre un nombre M tel que, pour toute valeur de $m > M$, on ait

$$| J^0_{m+n} - J^0_m | < \varepsilon_m$$

quel que soit n.

Donc, les intégrales minimisées J^0_m tendent vers une valeur limite quand m croît indéfiniment.

6. *Convergence de* $\iint_{(\mathfrak{D})} \Phi_1^2\, dx\, dy$, ... — Malheureusement, la méthode précédente ne nous permet pas de passer de la convergence des intégrales J_m^0 à celle des intégrales

$$\iint_{(\mathfrak{D})} \Phi_1^2\, dx\, dy, \qquad \iint_{(\mathfrak{D})} \Phi_2^2\, dx\, dy,$$

où

$$\Phi_1 = \varphi_{1,m+n} - \varphi_m,$$
$$\Phi_2 = \varphi_{2,m+n} - \varphi_m.$$

En effet, elle ne nous renseigne que sur la convergence de

$$\iint_{(\mathfrak{D})} \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\right)^2 dx\, dy,$$
$$\iint_{(\mathfrak{D})} \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right)^2 dx\, dy,$$

ce qui ne nous est d'aucune utilité.

On peut cependant arriver au résultat cherché en changeant les hypothèses faites, au paragraphe précédent, sur η, h_1 et les fonctions ψ.

Nous supposerons maintenant

$$h_1 < 0$$

ou, en explicitant, il faudra :

1° Si $2\omega\cos\theta < 0$ (hémisphère austral)

$$|i\lambda| < |2\omega\cos\theta|;$$

2° Si $2\omega\cos\theta > 0$ (hémisphère boréal)

$$|i\lambda| < 2\omega\cos\theta,$$

donc toujours

$$|i\lambda| < |2\omega\cos\theta|.$$

Enfin, assujettissons les fonctions ψ (qui doivent d'ailleurs satisfaire aux conditions données sur le contour) à vérifier la relation

$$\iint_{(\mathfrak{D})} \eta \frac{\partial(\psi_i, \psi_j)}{\partial(x, y)}\, dx\, dy = 0$$

quelles que soient les valeurs des indices i, j.

En particulier, on pourra choisir les fonctions ψ telles que la relation

$$\iint_{(D)} \eta \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx\, dy = 0$$

soit vérifiée pour toutes les valeurs des indices i et j, sauf pour $i = j$.

Telles sont les hypothèses que nous adopterons définitivement, à l'exclusion de celles que nous avions faites au paragraphe précédent.

L'intégrale

$$\iint_{(D)} \eta \frac{\partial(\varphi_{1,m}, \varphi_{2,m})}{\partial(x, y)} dx\, dy = 0$$

étant nulle, J_m^0 se réduira ici à

$$J_m^0 = \iint_{(D)} \left\{ \frac{h_1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial y}\right)^2 \right] + \frac{\lambda^2}{2gk^2} (\varphi_{1,m}^2 + \varphi_{2,m}^2) \right\} dx\, dy$$

et sera toujours négative, puisque λ est purement imaginaire et que nous avons fait l'hypothèse $h_1 < 0$.

Dans les mêmes conditions, $J_{m+n}^0 - J_m^0$ se réduira à l'intégrale

$$\iint_{(D)} \left\{ -\frac{h_1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\right)^2 \right] - \frac{\lambda^2}{2gk^2} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \right\} dx\, dy$$

et restera donc toujours positive, ce qui nous permet d'écrire comme précédemment

$$| J_{m+n}^0 - J_m^0 | < \varepsilon_m$$

et chaque partie de l'élément de cette intégrale étant négative, nous obtenons les six inégalités suivantes :

$$\iint_{(D)} \left| \frac{h_1}{2} \left[\frac{\partial(\varphi_{1,m+n} - \varphi_{1,m})}{\partial x} \right]^2 \right| dx\, dy < \varepsilon_m ;$$

$$\iint_{(D)} \left| \frac{h_1}{2} \left[\frac{\partial(\varphi_{2,m+n} - \varphi_{2,m})}{\partial x} \right]^2 \right| dx\, dy < \varepsilon_m ;$$

$$\iint_{(D)} \left| \frac{h_1}{2} \left[\frac{\partial(\varphi_{1,m+n} - \varphi_{1,m})}{\partial y} \right]^2 \right| dx\, dy < \varepsilon_m ;$$

$$\iint_{(D)} \left| \frac{h_1}{2} \left[\frac{\partial(\varphi_{2,m+n} - \varphi_{2,m})}{\partial y} \right]^2 \right| dx\, dy < \varepsilon_m$$

et

$$\iint_{\mathfrak{D}} \left| \frac{\lambda^2}{2gk^2} (\varphi_{1,m+n} - \varphi_{1,m})^2 \right| dx\, dy < \varepsilon_m;$$

$$\iint_{\mathfrak{D}} \left| \frac{\lambda^2}{2gk^2} (\varphi_{2,m+n} - \varphi_{2,m})^2 \right| dx\, dy < \varepsilon_m.$$

Ces inégalités vont nous permettre d'établir la convergence uniforme de nos fonctions presque partout.

7. *La convergence en moyenne des fonctions* φ_m. — Montrons [1] que de la suite donnée

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_m, \quad \ldots$$

on peut en extraire une autre qui converge uniformément en général vers une fonction finie et bien déterminée, en tout point intérieur au domaine $\mathfrak{D}$, sauf peut-être en un ensemble de points dont la mesure superficielle est nulle.

De cette suite donnée on sait d'abord qu'à tout nombre $\varepsilon_m > 0$, donné à l'avance, on peut faire correspondre un nombre m tel que, pour toute valeur de $n > m$, on ait

$$\iint_{\mathfrak{D}} (\varphi_m - \varphi_n)^2\, dx\, dy < \varepsilon_m.$$

Cela résulte de la dernière inégalité du paragraphe précédent, puisque, dans cette inégalité, le coefficient $\frac{\lambda^2}{2gk^2}$ est toujours négatif.

On sait de plus que

$$\lim_{m=\infty} \varepsilon_m = 0.$$

On peut donc choisir d'une infinité de manières une suite de nombres positifs décroissants

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_m, \quad \ldots,$$

---

[1] La démonstration suivante a été donnée, pour le cas d'une variable, par M. Plancherel (*Rendiconti del Circ. mat. di Palermo*, t. XXX, 1910). Pour simplifier les notations, nous raisonnerons sur une suite à un seul indice : la démonstration s'applique donc soit à $\varphi_{1,m}$, soit à $\varphi_{2,m}$.

tels que la série

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \varepsilon_i$$

soit convergente.

Désignons par $E'(\eta)$ l'ensemble des points intérieurs au domaine $\mathfrak{D}$, pour lesquels une fonction quelconque φ_m de notre suite a un module supérieur à un nombre positif η :

$$|\varphi_m| > \eta.$$

La mesure superficielle $m_s|E'(\eta)|$ de cet ensemble vérifiera l'inégalité

$$\eta^2 m_s[E'(\eta)] \leqq \int\int_{\mathfrak{D}} \varphi_m^2 \, dx \, dy.$$

D'où

$$m_s[E'(\eta)] \leqq \frac{1}{\eta^2} \int\int_{\mathfrak{D}} \varphi_m^2 \, dx \, dy.$$

Soit $E(\eta)$ le complémentaire de $E'(\eta)$, c'est-à-dire l'ensemble des points intérieurs à $\mathfrak{D}$ et ne faisant pas partie de $E'(\eta)$. La mesure de ce nouvel ensemble vérifiera l'égalité

$$m_s[E(\eta)] = D - m_s[E'(\eta)],$$

en appelant D l'aire du domaine $\mathfrak{D}$, au sens élémentaire du mot. Donc

$$m_s[E(\eta)] \geqq D - \frac{1}{\eta^2} \int\int_{\mathfrak{D}} \varphi_m^2 \, dx \, dy$$

et, en chaque point de cet ensemble $E(\eta)$, nous aurons par définition

$$|\varphi_m| < \eta.$$

Ces notions étant rappelées, nous allons déterminer une limite inférieure de la mesure superficielle de l'ensemble $E_{m'}(\eta_m)$ des points en chacun desquels on ait

$$|\varphi_{m'} - \varphi_n| < \eta_m,$$

quels que soient m' et $n > m$, η_m désignant un nombre positif donné tendant vers zéro quand m augmente indéfiniment. Nous désignerons

par $E'_{m'}(\eta_m)$ son complémentaire. En tout point de $E_{m'}(\eta_m)$, nous avons

$$\begin{aligned}
&|\varphi_{m'} - \varphi_{m'+1}| < \eta_m,\\
&|\varphi_{m'} - \varphi_{m'+2}| < \eta_m,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&|\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p}| < \eta_m,
\end{aligned}$$

$p > m'$ désignant un entier positif d'ailleurs quelconque. En chaque point de $E_{m'}(\eta_m)$, il y a un des premiers membres de ces p inégalités supérieur ou égal aux $p-1$ autres : la fonction égale en chaque point de $E_{m'}(\eta_m)$ à ce module maximum sera appelée $\varphi_{m',p}$.

L'ensemble $\mathcal{E}'_{m',p}(\eta_m)$ des points en lesquels on a

$$\varphi_{m',p} > \eta_m$$

aura une mesure superficielle inférieure à

$$\frac{1}{\eta_m^2}\int\int_{\textcircled{D}} \varphi_{m',p}^2\, dx\, dy.$$

Cela va nous permettre de trouver une limite supérieure de $m_s[E'_{m'}(\eta_m)]$, c'est-à-dire la limite inférieure de $m_s[E_{m'}(\eta_m)]$ que nous cherchons.

En effet, remarquons d'abord que l'ensemble $\mathcal{E}'_{m',p}(\eta_m)$ est intérieur à $\mathcal{E}'_{m',p+1}(\eta_m)$, ce dernier à $\mathcal{E}'_{m',p+2}(\eta_m)$, ...

Cela résulte de leur définition même, puisqu'en un point où l'on a, par exemple,

$$\varphi_{m',p+1} > \eta_m,$$

on aura *a fortiori*

$$\varphi_{m',p} > \eta_m,$$

car $\varphi_{m',p+1}$ désigne en chaque point la plus grande des fonctions

$$|\varphi_{m'} - \varphi_{m'+1}|, \quad \dots, \quad |\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p'}|, \quad |\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p+1}|$$

et $\varphi_{m',p}$ la plus grande de ces p premières fonctions.

Donc, tous ces ensembles seront contenus dans le suivant :

$$\lim_{p=\infty} \mathcal{E}'_{m',p}(\eta_m).$$

De plus, je dis que tout point de $E_{m'}(\eta_m)$ appartient à l'un au moins des ensembles

$$\mathcal{E}'_{m',p}(\eta_m), \quad \mathcal{E}'_{m',p+1}(\eta_m), \quad \dots.$$

En effet, un point appartient à $E'_{m'}(\eta_m)$ quand l'une au moins des inégalités de la forme

$$|\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p}| < \eta_m \qquad (p > m')$$

n'est pas vérifiée. En d'autres termes, en tout point de $E'_{m'}(\eta_m)$, on a au moins une inégalité de la forme

$$|\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p}| \geqq \eta_m.$$

Mais, par définition, on a

$$\varphi_{m',p} \geqq |\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p}| \geqq \eta_m.$$

Donc ce point fera nécessairement partie d'un ensemble $\mathcal{E}'_{m',p}(\eta_m)$. Donc

$$m_s[E'_{m'}(\eta_m)] \leqq m_s\left[\lim_{p=\infty} \mathcal{E}'_{m',p}(\eta_m)\right].$$

Tout revient donc à trouver une limite supérieure de cette dernière quantité.

Or, nous avons vu que

$$m_s[\mathcal{E}'_{m',p}(\eta_m)] \leqq \frac{1}{\eta_m^2} \int\int_D \varphi^2_{m',p}\, dx\, dy,$$

et, d'autre part, on a évidemment

$$\varphi_{m',p} \leqq |\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p}| + \varphi_{m',p-1}$$

puisque, par définition, $\varphi_{m',p}$ est toujours égale à l'un ou l'autre des termes du second membre. Il en résulte

$$\varphi^2_{m',p} \leqq 2|\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p}|^2 + 2\varphi^2_{m',p-1},$$

et comme $\varphi_{m',p-1}$ satisfait à une inégalité analogue, on arrive de proche en proche à l'inégalité

$$\varphi^2_{m',p} \leqq 2|\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p}|^2 + 2|\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p-1}|^2 + \ldots + 2|\varphi_{m'} - \varphi_{m'+1}|^2.$$

En se rappelant les inégalités du début

$$\int\int_{(D)} |\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p}|^2\, dx\, dy < \varepsilon_{m'+p}, \qquad \ldots,$$

on obtient

$$\int\int_{(\mathfrak{D})} \varphi_{m',p}^2\, dx\, dy \leqq 2(\varepsilon_{m'+p} + \varepsilon_{m'+p-1} + \ldots + \varepsilon_{m'+1}),$$

et le second membre étant convergent pour la suite extraite qui nous occupe

$$m_s[\mathcal{E}'_{m',p}(\eta_m)] \leqq \frac{1}{\eta_m^2} \int\int_{(\mathfrak{D})} \varphi_{m',p}^2\, dx\, dy \leqq \frac{2}{\eta_m^2} \sum_{p=m'+1}^{p=\infty} \varepsilon_p,$$

et comme m' peut être choisi aussi grand qu'on le veut, on est assuré que

$$\omega_m = \frac{2}{\eta_m^2} \sum_{p=m'+1}^{p=\infty} \varepsilon_p$$

peut être rendu aussi petit que l'on veut et, en particulier, tel que la série

$$\Sigma \omega_m$$

converge.

D'après ce qui précède,

$$m_s[\mathrm{E}'(\eta_m)] \leqq m_s\left[\lim_{p=\infty} \mathcal{E}'_{m',p}(\eta_m)\right] \leqq \omega_m.$$

On obtiendrait de la même manière

$$m_s[\mathrm{E}'(\eta_p)] \leqq \omega_p \qquad (p > m)$$

qui définit l'ensemble où l'une au moins des inégalités

$$|\varphi_p - \varphi_n| < \eta_p \qquad (n > p)$$

n'est pas vérifiée. Finalement, nous sommes assurés de la convergence uniforme de nos fonctions φ_m en tout point n'appartenant pas à l'un des ensembles $\mathrm{E}'(\eta_m)$. Mais la somme des mesures de ces ensembles, à partir du rang p, est inférieure à

$$\sum_{m=p}^{m=\infty} \omega_m,$$

et cette dernière série étant convergente, cette somme peut être

rendue aussi petite que l'on veut. Comme c'est une constante, elle est rigoureusement nulle.

Donc nos fonctions convergent uniformément en tout point du domaine $\mathfrak{D}$, sauf peut-être en un ensemble de points, de mesure nulle.

Dans cette démonstration, le choix des fonctions formant la suite extraite n'a été soumis qu'à la seule restriction que $\Sigma\varepsilon_m$ soit convergente. A cette seule condition, toutes les suites extraites tendront, dans le domaine indiqué, vers une fonction limite φ.

On voit immédiatement que cette fonction φ est de carré intégrable: à cause de la convergence uniforme, on a en effet

$$\int\int_{E_n} \varphi^2\, dx\, dy = \lim_{m=\infty} \int\int_{E_n} \varphi_m^2\, dx\, dy,$$

E_n désignant le domaine de convergence uniforme de φ_m. Comme de

$$|\varphi_m| < |\varphi_p - \varphi_m| + |\varphi_p| \qquad (p < m)$$

on tire

$$\int\int_{E_n} \varphi_m^2\, dx\, dy \leqq 2\int\int_{E_n} (\varphi_p - \varphi_m)^2\, dx\, dy + 2\int\int_{E_n} \varphi_p^2\, dx\, dy$$
$$\leqq 2\varepsilon_p + 2\int\int_{\mathfrak{D}} \varphi_p^2\, dx\, dy,$$

il vient

$$\int\int_{E_n} \varphi^2\, dx\, dy \leqq 2\varepsilon_p + 2\int\int_{\mathfrak{D}} \varphi_p^2\, dx\, dy,$$

et comme la limite du premier membre n'est autre chose que

$$\int\int_{\mathfrak{D}} \varphi^2\, dx\, dy,$$

φ^2 est bien intégrable.

Cette fonction φ est d'ailleurs unique. En partant de sa définition même

$$\varphi = \lim_{m=\infty} \varphi_m,$$

on peut écrire

$$\int\int_{E_n} (\varphi - \varphi_p)^2\, dx\, dy = \lim_{m=\infty} \int\int_{E_n} (\varphi_m - \varphi_p)^2\, dx\, dy,$$

et le second membre tendant vers zéro quand p augmente indéfi-

niment

$$\lim_{p=\infty} \iint_{(D)} (\varphi - \varphi_p)^2 \, dx \, dy = 0.$$

En prenant une autre fonction φ_q de la suite, on obtiendrait également

$$\lim_{q=\infty} \iint_{(D)} (\varphi - \varphi_q)^2 \, dx \, dy = 0,$$

puisque

$$|\varphi - \varphi_q| \leqq |\varphi - \varphi_p| + |\varphi_p - \varphi_q|,$$

et que

$$\lim_{p,q=\infty} \iint_{(D)} |\varphi_p - \varphi_q|^2 \, dx \, dy = 0.$$

Donc nos fonctions tendent presque partout vers une fonction unique.

Passons à la convergence des dérivées premières. Nous aurons encore ici

$$\iint_{(D)} \left[\frac{\partial(\varphi_m - \varphi_n)}{\partial x}\right]^2 dx \, dy < \varepsilon_m,$$

$$\iint_{(D)} \left[\frac{\partial(\varphi_m - \varphi_n)}{\partial y}\right]^2 dx \, dy < \varepsilon_m,$$

puisque le coefficient h_1 a été supposé négatif. De plus, ε_m est le même que celui que nous avons rencontré dans l'étude de la convergence de φ_m. On pourra donc choisir la même suite de nombres positifs décroissants

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_m, \quad \ldots$$

et tels que la série $\Sigma \varepsilon_i$ converge d'une manière identique à celle employée dans le cas de φ_m. Les suites extraites se correspondront donc entièrement, au point de vue des indices, dans les deux cas.

On démontrerait sans peine, par un raisonnement analogue à celui employé précédemment, que $\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi_m}{\partial y}$ tendent uniformément en tout point du domaine, respectivement vers des fonctions uniques X, Y, sauf peut-être en des ensembles E'_x, E'_y de points, de mesure nulle.

Mais les fonctions X, Y ainsi obtenues sont-elles bien les dérivées de la fonction φ? La correspondance absolue des indices, et par con-

séquent des suites extraites, permet d'affirmer qu'en dérivant φ terme à terme, on retombera sur X et Y (formellement). Comme on est assuré de la convergence uniforme de φ, X, Y, sauf peut-être respectivement sur les ensembles E', E'_x, E'_y, on peut dire que X et Y seront bien les dérivées de φ, sauf peut-être en un ensemble de points

$$E' + E'_x + E'_y,$$

dont la mesure sera nulle.

En raisonnant comme précédemment, on démontrerait également l'unicité de chacune des deux fonctions limites X, Y et l'intégrabilité de leurs carrés.

Il reste à voir si les fonctions limites ainsi obtenues sont bien solution du problème.

8. *Existence de la solution fondamentale.* — Pour démontrer l'identité de nos fonctions limites et de la solution du problème proposé, il est nécessaire d'établir l'existence d'une certaine fonction que j'appellerai *solution fondamentale* de notre équation et que je définirai de la manière suivante :

En reprenant les notations du Chapitre II, écrivons l'équation des marées sous la forme

$$\Delta\varphi + a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c\varphi = f(x, y)$$

et posons

$$\mathcal{F}(\varphi) = \Delta\varphi + a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c\varphi.$$

Pour ne pas compliquer inutilement l'écriture, nous supposerons tous les coefficients de cette équation réels.

La solution fondamentale $H(x, y, \xi, \eta)$ sera définie par les deux conditions suivantes :

1° En tout point intérieur au domaine $\mathfrak{D}$, sauf au point $(x, y) = (\xi, \eta)$, la fonction

$$H_1(x, y; \xi, \eta) = H(x, y; \xi, \eta) - \log\frac{1}{r}$$

vérifie l'équation

$$\mathcal{F}(H_1) = -\mathcal{F}\left(\log\frac{1}{r}\right).$$

2° Sur le contour, on a

$$\frac{\partial H}{\partial n} + C\frac{\partial H}{\partial s} = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial H_1}{\partial n} + C\frac{\partial H_1}{\partial s} = -\frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial n} - C\frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial s}.$$

Tout revient donc à calculer cette fonction H_1. Pour cela, il suffit de se rappeler les propriétés de la fonction de Green généralisée, étudiée au Chapitre II, et définie par les conditions :

1° $$G_1(x, y; \xi, \eta) = G(x, y; \xi, \eta) - \log\frac{1}{r}$$

est harmonique à l'intérieur de $\mathfrak{D}$.

2° Sur le contour, on a

$$\frac{\partial G}{\partial n} + C\frac{\partial G}{\partial s} = 0.$$

Je dis que la fonction $H_1(x, y; \xi, \eta)$, définie par l'équation suivante, répond à la question

$$\begin{aligned}(33)\quad & H_1(x, y; \xi, \eta) \\ & = G_1(x, y; \xi, \eta) \\ & \quad - \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathfrak{D}}\left\{a'\frac{\partial H'_1}{\partial \lambda} + b'\frac{\partial H'_1}{\partial \mu} + c'H'_1 + \mathfrak{F}\left[\log\frac{1}{r(\lambda, \mu; \xi, \eta)}\right]\right\} \\ & \quad \times G(x, y; \lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu,\end{aligned}$$

où, dans les termes accentués, x, y doivent être remplacés par λ, μ. Le point $(\lambda, \mu) = (\xi, \eta)$ ayant été exclu précédemment, dans le terme tout connu

$$\iint \mathfrak{F}\left[\log\frac{1}{r(\lambda, \mu; \xi, \eta)}\right] G(x, y; \lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu,$$

l'intégrale sera étendue au domaine $\mathfrak{D}$ à l'exclusion d'un petit cercle entourant le point $(\lambda, \mu) = (\xi, \eta)$, et dont on fera ensuite évanouir le rayon.

On voit immédiatement, en vertu de l'équation de Poisson et de la relation $\Delta G_1 = 0$, que, sauf au point $(x, y) = (\xi, \eta)$,

$$\Delta H_1 = -a\frac{\partial H_1}{\partial x} - b\frac{\partial H_1}{\partial y} - cH_1 - \mathfrak{F}\left[\log\frac{1}{r(x, y; \xi, \eta)}\right],$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}(H_1) = -\mathcal{F}\left(\log\frac{1}{r}\right).$$

Enfin, à cause de l'équation (33) et de

$$\frac{\partial G}{\partial n} + C\frac{\partial G}{\partial s} = 0,$$

au bord, on aura

$$\frac{\partial H_1}{\partial n} + C\frac{\partial H_1}{\partial s} = \frac{\partial G_1}{\partial n} + C\frac{\partial G_1}{\partial s} = -\frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial n} - C\frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial s}.$$

Donc

$$H = H_1 + \log\frac{1}{r}$$

répond bien à la question.

L'équation (33) n'a pas tout à fait la forme de celle de Fredholm, mais nous avons vu qu'il était facile de l'y ramener en intégrant par parties les termes de l'intégrale contenant les dérivées premières de la fonction. Il suffit donc d'appliquer ici les raisonnements faits plus haut pour arriver au résultat cherché.

9. *La fonction limite et la solution du problème.* — On sait que, pour répondre à cette question, il existe plusieurs méthodes :

1° Celle fondée sur l'emploi du lemme de M. Hilbert revient essentiellement à intégrer la fonction obtenue pour permettre ensuite le passage à la limite. Elle a été employée par Ritz dans tous ses travaux, mais ne semble pas applicable à notre problème à cause de la dissymétrie de notre fonction de Green.

2° Celle qui consiste à remplacer la valeur de la fonction en un point par ses valeurs le long d'un contour. Elle a été appliquée, sous des formes diverses, au problème de Dirichlet, par MM. Lebesgue [1], Fubini [2], etc.

Comme dans la méthode précédente, le passage à la limite est encore obtenu grâce à une intégration.

Nous essaierons d'appliquer à notre problème une méthode ana-

---

[1] *Rendiconti del Circ. mat. di Palermo*, 1907.

[2] *Rendiconti del Circ. mat. di Palermo*, 1906 et 1907.

logue à celle de M. Fubini. Rappelons brièvement le principe de cette méthode dans le cas du problème de Dirichlet.

Soient $U(x, y)$ une fonction harmonique à l'intérieur d'un domaine $\mathfrak{D}$, et γ un cercle situé tout entier à l'intérieur. Soient enfin (x, y) un point situé sur la circonférence de γ, (a, b) un point situé à l'intérieur de $\mathfrak{D}$, r leur distance. On sait que l'expression

$$-\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \left(U\frac{\partial \log r}{\partial n} - \log r\frac{\partial U}{\partial n}\right) ds$$

représente $U(a, b)$ si le point (a, b) est intérieur au cercle γ. Elle est nulle s'il lui est extérieur.

Soit maintenant une suite

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_m, \quad \ldots,$$

minimisante pour l'intégrale de Riemann

$$\iint_{\mathfrak{D}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy.$$

M. Fubini recherche pour ces fonctions minimisantes une propriété analogue à celle de la fonction harmonique, et il établit le théorème suivant :

En tout point intérieur au domaine $\mathfrak{D}$, la fonction

$$u = -\frac{1}{2\pi}\lim_{m\infty}\int_\gamma \left(u_m\frac{\partial \log r}{\partial n} - \log r\frac{\partial u_m}{\partial n}\right) ds$$

existe. Elle est nulle si (a, b) est extérieur à γ; elle est indépendante de γ et ne dépend que de (a, b) si (a, b) est intérieur à γ.

Cette propriété permet d'affirmer, en balayant tout le domaine avec le cercle γ, que u est harmonique et représente la fonction $\lim_{m\infty} u_m$ partout où elle existe.

Pour appliquer cette méthode au problème des marées, il faut commencer par généraliser la formule de Green [1]. Ici, l'intégrale de Poincaré jouera le même rôle que l'intégrale de Riemann dans le cas du problème de Dirichlet.

---

[1] F. Jager, *Comptes rendus Acad. Sc.*, 27 avril 1914.

Nous suivrons une méthode analogue à celle que l'on emploie pour établir la formule de Green classique, et pour cela nous partirons de l'intégrale suivante :

$$(34)\quad \mathrm{I}=\int\int_{(\mathfrak{D})}\Big\{\frac{\eta-h_1}{2}\Big(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\chi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\frac{\partial\chi_2}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\chi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\frac{\partial\chi_2}{\partial y}\Big)$$
$$-\frac{\eta}{2}\Big[\Big(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial\chi_1}{\partial x}-\frac{\partial\chi_2}{\partial y}\Big)$$
$$+\Big(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial\chi_1}{\partial y}+\frac{\partial\chi_2}{\partial x}\Big)\Big]-\frac{\lambda^2}{2gk^2}(\varphi_1\chi_1+\varphi_2\chi_2)\Big\}dx\,dy,$$

qui, en y faisant $\chi_1=\varphi_1$, $\chi_2=\varphi_2$, reproduit, aux termes tout connus près, l'intégrale de Poincaré. En d'autres termes, elle jouera ici le rôle de

$$\int\int_{(\mathfrak{D})}\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\Big)dx\,dy$$

pour l'intégrale de Riemann.

Récrivons nos équations (27) du début et, pour abréger, désignons respectivement par $\mathfrak{F}_1(\quad)$ et par $\mathfrak{F}_2(\quad)$ chacun de leurs premiers membres.

De l'intégrale I on déduira alors, au moyen d'intégrations par parties (il est inutile de donner le détail du calcul puisqu'on se borne aux opérations inverses de celles qu'on a faites pour obtenir l'intégrale de Poincaré),

$$\mathrm{I}=\int\int_{(\mathfrak{D})}\varphi_1\mathfrak{F}_1(\chi_1)+\varphi_2\mathfrak{F}_2(\chi_2)\,dx\,dy+\int_{\mathrm{C}}\varphi_1\Big(h_1\frac{\partial\chi_1}{\partial n}ds-\eta\,d\chi_2\Big)$$
$$+\int_{\mathrm{C}}\varphi_2\Big(h_1\frac{\partial\chi_2}{\partial n}ds+\eta\,d\chi_1\Big),$$

et comme l'intégrale I du premier membre ne change pas quand on permute (φ_1,φ_2), (χ_1,χ_2), on a

$$(35)\quad \int\int_{(\mathfrak{D})}[\varphi_1\mathfrak{F}_1(\chi_1)-\chi_1\mathfrak{F}_1(\varphi_1)+\varphi_2\mathfrak{F}_2(\chi_2)-\chi_2\mathfrak{F}_2(\varphi_2)]\,dx\,dy$$
$$=\int_{\mathrm{C}}-h_1\Big(\varphi_1\frac{\partial\chi_1}{\partial n}-\chi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}+\varphi_2\frac{\partial\chi_2}{\partial n}-\chi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Big)ds$$
$$+\int_{\mathrm{C}}\eta(\varphi_1\,d\chi_2-\chi_1\,d\varphi_2-\varphi_2\,d\chi_1+\chi_2\,d\varphi_1).$$

Enfin, soient $\varphi_1 + i\varphi_2$ une solution des équations associées, G_1 et G_2 des solutions fondamentales, on aura, en entourant le point (ξ, η) d'un petit cercle dont on fait tendre ensuite le rayon vers zéro,

$$(36)\quad [h_1(\varphi_1+\varphi_2)]_{\xi,\eta} = -\frac{1}{2\pi}\int_C h_1\left(\varphi_1\frac{\partial G_1}{\partial n} - G_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + \varphi_2\frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right) ds$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_C \eta(\varphi_1\, dG_2 - G_1\, d\varphi_2 - \varphi_2\, dG_1 + G_2\, d\varphi_1)$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathfrak{D}} (G_1 f_1 + G_2 f_2)\, dx\, dy,$$

en désignant par $-f_1$ et $-f_2$ les seconds membres des équations proposées. Pour $h = 1$, $\eta = 0$, nos équations se réduisant à celle de Laplace, on retombe sur la formule de Green ordinaire.

Si nous assujettissons les fonctions φ à satisfaire aux conditions aux limites du problème, les fonctions G prenant d'ailleurs des valeurs quelconques le long du contour, on obtient

$$[h_1(\varphi_1+\varphi_2)]_{\xi,\eta} = -\frac{1}{2\pi}\int_C \left[\varphi_1\left(h_1\frac{\partial G_1}{\partial n} - \eta\frac{\partial G_2}{\partial s}\right) + \varphi_2\left(h_1\frac{\partial G_2}{\partial n} + \eta\frac{\partial G_1}{\partial s}\right)\right] ds$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathfrak{D}} (f_1 G_1 + f_2 G_2)\, dx\, dy.$$

Telle est l'expression qui sera vérifiée pour toutes les fonctions associées φ_1 et φ_2, solutions du problème, pourvu que (ξ, η) soit intérieur au contour.

Cherchons une propriété analogue pour nos fonctions minimisantes et montrons que, pour de telles fonctions, l'expression suivante, où γ désigne un cercle quelconque intérieur à $\mathfrak{D}$,

$$-\frac{1}{2\pi}\lim_{m\infty}\int_\gamma \left[\varphi_{1,m}\left(h_1\frac{\partial G_1}{\partial n} - \eta\frac{\partial G_2}{\partial s}\right) + \varphi_{2,m}\left(h_1\frac{\partial G_2}{\partial n} + \eta\frac{\partial G_1}{\partial s}\right)\right] ds$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\iint_\gamma (f_1 G_1 + f_2 G_2)\, dx\, dy$$

est constante si le point ξ, η est extérieur au cercle γ ; et qu'elle ne

dépend pas de γ, mais seulement du point (ξ, η), si (ξ, η) lui est intérieur.

Pour cela, nous partirons de l'intégrale suivante :

$$(37)\quad \iint_{(\mathfrak{D})} \Big[-h_1 \Big(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\frac{\partial \chi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{\partial \chi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\frac{\partial \chi_2}{\partial y} \Big) + \eta \frac{\partial(\chi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)} - \eta \frac{\partial(\chi_2, \varphi_1)}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2}{gk^2}(\varphi_1\chi_1 + \varphi_2\chi_2) + f_1\chi_1 + f_2\chi_2 \Big] dx\, dy.$$

Je dis que cette intégrale est nulle si φ_1 et φ_2 représentent des fonctions associées minimisantes pour l'intégrale de Poincaré et si χ_1 et χ_2 sont des fonctions assujetties uniquement à satisfaire aux conditions aux limites du problème.

Pour le voir, il suffit de se rappeler que nous avons obtenu précédemment les deux relations

$$\iint_{(\mathfrak{D})} \Big\{ -h_1 \Big[\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial x}\frac{\partial \zeta_{1,m}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial y}\frac{\partial \zeta_{1,m}}{\partial y} + \eta \frac{\partial(\zeta_{1,m}, \varphi_{2,m})}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2}{gk^2}\varphi_{1,m}\zeta_{1,m} + f_1\zeta_{1,m} \Big] \Big\} dx\, dy = 0,$$

$$\iint_{(\mathfrak{D})} \Big\{ -h_1 \Big[\frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial x}\frac{\partial \zeta_{2,m}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial y}\frac{\partial \zeta_{2,m}}{\partial y} + \eta \frac{\partial(\varphi_{1,m}, \zeta_{2,m})}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2}{gk^2}\varphi_{2,m}\zeta_{2,m} + f_2\zeta_{2,m} \Big] \Big\} dx\, dy = 0,$$

où $\varphi_{1,m}$, $\varphi_{2,m}$ sont des fonctions minimisantes pour l'intégrale de Poincaré et $\zeta_{1,m}$, $\zeta_{2,m}$ des fonctions assujetties uniquement à satisfaire aux conditions aux limites du problème, et pouvant représenter une fonction quelconque pour m croissant indéfiniment. Donc, à la limite, en désignant respectivement par φ_1 et φ_2 les limites, pour m infini, de $\varphi_{1,m}$ et $\varphi_{2,m}$, aux points où elles existent, et en désignant par χ_1, χ_2 des fonctions quelconques satisfaisant aux conditions aux limites du problème, l'intégrale (37) sera nulle. Pour abréger, nous l'écrirons

$$J(\varphi_1, \varphi_2; \chi_1, \chi_2) = 0.$$

Pour d'autres fonctions χ_1^*, χ_2^*, assujetties aux mêmes conditions

aux limites, nous aurions également

$$J(\varphi_1, \varphi_2; \chi_1^*, \chi_2^*) = 0.$$

Donc

$$J(\varphi_1, \varphi_2; \chi_1, \chi_2) = J(\varphi_1, \varphi_2; \chi_1^*, \chi_2^*).$$

Ceci posé, considérons deux cercles C′ et C″ intérieurs au domaine $\mathfrak{D}$ et contenant tous deux le point (ξ, η). J'appellerai, en séparant les parties réelles et imaginaires : $G(x, y, \xi, \eta)$, la fonction fondamentale assujettie à vérifier sur la frontière de $\mathfrak{D}$ les conditions aux limites du problème;

$$G'(x, y; \xi, \eta) = G'_1 + iG'_2; \qquad G''(x, y; \xi, \eta) = G''_1 + iG''_2$$

deux autres fonctions fondamentales, définies respectivement à l'intérieur des cercles C′ et C″ et assujetties d'ailleurs à des conditions aux limites quelconques.

Les fonctions $\chi_1, \chi_2, \chi_1^*, \chi_2^*$ étant assujetties à la seule condition de satisfaire aux conditions aux limites du problème le long du contour C du domaine $\mathfrak{D}$, nous pouvons les définir de la façon suivante :

$\chi_1 = G'_1 - G_1$	à l'intérieur de	C′;	$\chi_1 = -G_1$	dans le domaine	$\mathfrak{D} - C'$;
$\chi_2 = G'_2 - G_2$	»	C′;	$\chi_2 = -G_2$	»	$\mathfrak{D} - C'$;
$\chi_1^* = G''_1 - G_1$	»	C″;	$\chi_1^* = -G_1$	»	$\mathfrak{D} - C''$;
$\chi_2^* = G''_2 - G_2$	»	C″;	$\chi_2^* = -G_2$	»	$\mathfrak{D} - C''$.

Les quatre fonctions ainsi définies n'ont plus aucun point singulier à l'intérieur de $\mathfrak{D}$. En effet, le seul point singulier des trois fonctions G, G′, G″ est le point logarithmique $(x, y) = (\xi, \eta)$.

Comme nous avons supposé ce point (ξ, η) intérieur à la fois au cercle C′ et au cercle C″, les différences $G'_1 - G_1$, $G'_2 - G_2$, ... n'auront plus aucune singularité en ce point et les fonctions G_1 et G_2 seront régulières en tout point extérieur à C′ et C″.

De plus les fonctions G, G′, G″ sont par hypothèse des solutions particulières de nos équations générales sans second membre, sauf au point $(x, y) = (\xi, \eta)$: il en sera de même des fonctions $\chi_1, \chi_2, \chi_1^*, \chi_2^*$, mais le point (ξ, η) ne jouera plus ici aucun rôle.

Ces remarques faites, revenons à notre égalité

$$J(\varphi_1, \varphi_2; \chi_1, \chi_2) = J(\varphi_1, \varphi_2; \chi_1^*, \chi_2^*)$$

et intégrons par parties de manière à mettre en facteur, dans chaque membre, les fonctions φ_1 et φ_2. En appelant comme précédemment $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les premiers membres de nos équations générales, et en remplaçant les χ par les valeurs que nous venons de définir, le premier membre de notre égalité deviendra

$$\begin{aligned}
&\iint_{C'} [\varphi_1 \mathcal{F}_1(G'_1 - G_1) + \varphi_2 \mathcal{F}_2(G'_2 - G_2) - f_1(G'_1 - G_1) - f_2(G'_2 - G_2)]\, dx\, dy \\
&+ \int_{\mathfrak{Q}-C'} [\varphi_1 \mathcal{F}_1(-G_1) + \varphi_2 \mathcal{F}_2(-G_2) - f_1 G_1 - f_2 G_2]\, dx\, dy \\
&+ \int_{C'} \left\{ \varphi_1 \left[h_1 \frac{\partial(G'_1 - G_1)}{\partial n} ds - \eta\, d(G'_2 - G_2) \right] + \varphi_2 \left[h_1 \frac{\partial(G'_2 - G_2)}{\partial n} ds + \eta\, d(G'_1 - G_1) \right] \right\} \\
&- \int_{C'} \left\{ \varphi_1 \left[h_1 \frac{\partial(-G_1)}{\partial n} ds - \eta\, d(-G_2) \right] + \varphi_2 \left[h_1 \frac{\partial(-G_2)}{\partial n} ds + \eta\, d(-G_1) \right] \right\} \\
&+ \int_{C} \left\{ \varphi_1 \left[h_1 \frac{\partial(-G_1)}{\partial n} ds - \eta\, d(-G_2) \right] + \varphi_2 \left[h_1 \frac{\partial(-G_2)}{\partial n} ds + \eta\, d(-G_1) \right] \right\}
\end{aligned}$$

et le second membre s'obtiendra en y changeant G' en G'', C' en C''.

On aperçoit immédiatement les simplifications :

1° Il ne reste dans les intégrales doubles que les termes indépendants de φ_1 et φ_2, puisque G, G', G'' sont solutions de nos équations sans second membre ;

2° La deuxième intégrale de ligne se retranche de la première ;

3° Les termes indépendants de G', G'', C' et C'' se détruisent dans les deux membres.

Pour que nos intégrales de ligne aient un sens, il faut évidemment supposer que les deux circonférences considérées C' et C'' ne font pas partie de l'ensemble de points en lesquels nos fonctions φ_1 et φ_2 n'ont pas été définies.

Avec cette restriction, nous arrivons finalement à la relation sui-

vante :

$$-\int\int_{C'}(f_1 G'_1 + f_2 G'_2)\,dx\,dy - \int_{C'}\left[\varphi_1\left(h_1\frac{\partial G'_1}{\partial n} - \eta\frac{\partial G'_2}{\partial s}\right) + \varphi_2\left(h_1\frac{\partial G'_2}{\partial n} + \eta\frac{\partial G'_1}{\partial s}\right)\right]ds$$
$$= \int\int_{C''}(f_1 G''_1 + f_2 G''_2)\,dx\,dy - \int_{C''}\left[\varphi_1\left(h_1\frac{\partial G''_1}{\partial n} - \eta\frac{\partial G''_2}{\partial s}\right) + \varphi_2\left(h_1\frac{\partial G''_2}{\partial n} + \eta\frac{\partial G''_1}{\partial s}\right)\right]ds.$$

Donc l'expression

$$-\int\int_{C'}(f_1 G'_1 + f_2 G'_2)\,dx\,dy - \int_{C'}\left[\varphi_1\left(h_1\frac{\partial G'_1}{\partial n} - \eta\frac{\partial G'_2}{\partial s}\right) + \varphi_2\left(h_1\frac{\partial G'_2}{\partial n} + \eta\frac{\partial G'_1}{\partial s}\right)\right]ds$$

est indépendante du cercle C′ et ne dépend que de la position du point ξ, η par rapport à C′.

Si (ξ, η) est intérieur à C′ et ne fait pas partie d'un certain ensemble, de mesure superficielle nulle, précédemment défini, l'expression précédente tend vers la valeur de

$$2\pi[h_1(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

au point (ξ, η) comme on le voit immédiatement en entourant le point (ξ, η) d'un petit cercle dont on fait tendre le rayon vers zéro, suivant la méthode déjà employée.

Donc nos fonctions minimisantes satisfont en général à la même relation que la solution même du problème : il ne peut y avoir exception que le long de circonférences formant au plus un ensemble de mesure superficielle nulle.

Conclusion. — Après ce très bref exposé de la théorie, qui suffit à faire entrevoir la complexité du problème que nous nous sommes posé, on est en droit de se demander si le calcul peut aboutir à des résultats pratiques intéressants. En d'autres termes, les méthodes que nous avons employées permettront-elles de retrouver des cas particuliers déjà connus? La méthode de Fredholm semble devoir conduire à des calculs presque inextricables; et la méthode de Ritz, dans le cas général, présente de grosses difficultés pratiques, si l'on veut rester

rigoureux, mais pourrait se simplifier notablement dans bien des cas particuliers.

Enfin, on dira peut-être que toutes ces théories excluent le seul cas pratique intéressant : le cas de résonance. Cette objection n'est pas valable, car, dans la nature, le frottement n'est jamais nul; et s'il y a frottement, l'oscillation propre sera nécessairement amortie : sa période λ comprendra donc une partie réelle qui ne pourra jamais devenir égale à la période essentiellement imaginaire de la force perturbatrice considérée.

Quelques théorèmes concernant la relation entre les zéros d'un polynome et ceux d'un polynome de degré inférieur;

Par B. GONGGRÜP,

Docteur ès Sciences, à Amsterdam.

Plusieurs savants ont tâché d'étendre le théorème de Rolle aux racines imaginaires des équations. L'extension de Liouville date de l'an 1864 (*Journal de Mathématiques*, t. IX, p. 84). Elle donne une relation intéressante entre les zéros complexes de $f(z)$ et de $f'(z)$; aussi dans la démonstration la *griffe du lion* se manifeste. Pourtant le théorème exige l'étude des *courbes* $Q = 0$, qui sont en général du même degré que $f(z)$ (¹); en outre il faut admettre que deux zéros de $f(z)$ peuvent être liés par une telle courbe *d'un trait continu*. Mais ces courbes $Q = 0$ sont en général de nature hyperbolique, de sorte que le trait continu est souvent impossible; par conséquent l'application pratique du théorème devient illusoire.

En 1902, M. Ch.-J. de la Vallée-Poussin (²) a attaqué le problème de nouveau par des courbes, c'est-à-dire par des *cassinoïdes*, $\operatorname{mod} f(z) = a$, et des *trajectoires*, $\arg f(z) = \theta$.

Le résultat principal de ses recherches est le théorème que voici :

La trajectoire qui réunit deux racines consécutives d'une équation passe au moins par une racine de la dérivée.

(¹) Quand tous les coefficients de $f(z)$ sont réels, $Q = 0$ se décompose en l'axe des X et une courbe du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré.

(²) *Mathesis*, 3e série, t. II, 1902, supplément.

La trajectoire qui réunit deux racines quelconques d'une équation passe au moins par une racine de la dérivée et au moins par autant d'autres racines en plus que de racines intermédiaires de l'équation.

Dans le cas où une équation a ses coefficients réels et possède des racines réelles, la trajectoire qui réunit ces racines réelles n'est autre chose que l'axe réel et le théorème se réduit au théorème de Rolle.

Du point de vue pratique ce théorème a les mêmes défauts que celui de Liouville : l'étude des courbes $\arg f(z) = \theta$ est incompatible avec des applications simples.

C'est à Félix Lucas [1] qu'on doit un troisième théorème qui a fait quelque éclat. Voici ce théorème :

Dans tout contour convexe qui enferme tous les zéros de $f(z)$ se trouvent aussi tous les zéros de $f'(z)$.

La démonstration de F. Lucas est assez prolixe ; lui aussi se sert de deux systèmes de courbes qu'il appelle *cassinoïdes* et *stelloïdes* et qui reviennent aux courbes $\operatorname{mod} f(z) = a$ et $\arg f(z) = \theta$ employées 23 ans après par M. de la Vallée-Poussin.

Outre ces systèmes de courbes orthogonales F. Lucas introduit encore quelques notations analytiques empruntées de la Mécanique. Aux points différents d'un groupe M il accorde l'unité de *masse;* il suppose que ces points repoussent un point arbitraire P avec des forces qui sont en raison inverse de leurs distances à ce point. La résultante de ces forces reçoit le nom d'*action algébrique du groupe sur ce point;* cette action possède un *potentiel,* etc. Il me paraît étrange d'introduire dans l'Analyse des notations et des raisonnements mécaniques. C'est pour ainsi dire le monde renversé. Au contraire, rien de plus naturel que d'employer dans les Mathématiques *appliquées* (Mécanique, Physique mathématique, etc.) les raisonnements de l'Analyse, par exemple de l'analyse des *vecteurs*, sœur jumelle de la théorie des fonctions de quantités complexes.

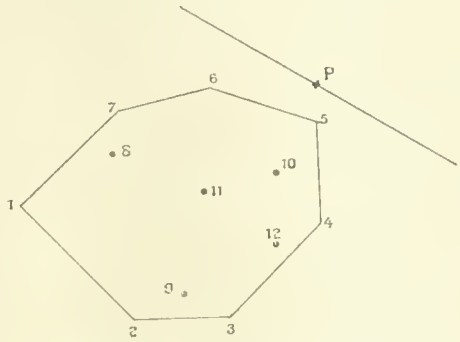
---

[1] *Géométrie des polynomes* (*Journal de l'École Polytechnique*, 46e Cahier, 1879).

Dans les pages suivantes j'expose une démonstration très simple et purement analytique d'un théorème dont découle immédiatement celui de Lucas. J'y ajoute un théorème équivalent concernant une autre fonction du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré, méconnue jusqu'à présent, mais tout aussi digne de remarque que la dérivée. De ces théorèmes je tirerai quelques conséquences.

Lemme I. — Un ensemble de points séparés, situés dans un même plan et dont aucun ne s'éloigne à l'infini, s'arrange toujours de manière que quelques-uns de ces points occupent les sommets d'un polygone

Fig. 1.



convexe à *l'intérieur* duquel se trouvent les autres. Ce polygone nous l'appellerons *polygone limite* (*fig.* 1).

Lemme II. — Par un point qui se trouve à *l'extérieur* d'un polygone *convexe* on peut toujours mener une droite infinie, qui ne rencontre la circonférence nulle part (qui reste toute en dehors du polygone) (*fig.* 1).

Théorème I. — *Aucun des zéros de la dérivée $f'(z)$ d'un polygone $f(z)$ ne peut se trouver en dehors du polygone limite des zéros de $f(z)$.*

Démonstration. — Supposons d'abord que $f(z)$ ne possède pas de zéros multiples. (Nous verrons après que ce théorème renferme ce cas.) Alors les zéros de $f(z)$ sont en même temps les racines de

l'équation

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \equiv \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \ldots + \frac{1}{z-z_n} = 0.$$

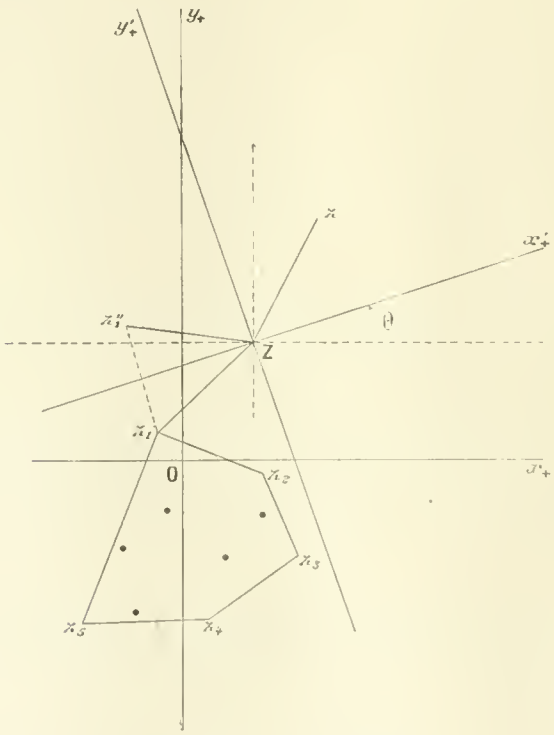
Soit ζ une de ces racines et supposons qu'elle soit située en dehors du polygone limite des zéros de $f(z)$.

Alors il faut que

$$(1) \qquad \frac{1}{z_1-\zeta} + \frac{1}{z_2-\zeta} + \ldots + \frac{1}{z_n-\zeta} = 0.$$

Transportez l'origine à ζ; faites tourner le système autour de ce point jusqu'à ce que l'axe des X (ou l'axe des Y) tombe tout en dehors du polygone limite des zéros de $f(z)$. Soit l'angle de rotation $= \theta$.

Fig. 2.



Regardez d'abord un point arbitraire z. Par rapport au nouveau système nous l'appellerons z'. Alors mod$(z-\zeta)$ deviendra mod z';

mais

$$\arg(z-\zeta) \quad \text{sera} \quad \arg z' + \theta,$$

de sorte que

$$z-\zeta = z' e^{i\theta} \quad \text{ou} \quad z = \zeta + z' e^{i\theta}.$$

Par cette transformation nous aurons donc

$$z_k - \zeta = z'_k e^{i\theta}.$$

Par conséquent (1) se transforme en

$$(1^a) \qquad \frac{1}{z'_1 e^{i\theta}} + \frac{1}{z'_2 e^{i\theta}} + \ldots + \frac{1}{z'_n e^{i\theta}} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sum \frac{1}{z'_k} = 0.$$

Le calcul du premier membre de cette équation revient à la composition des n vecteurs $\frac{1}{z'_k}$. Chacun d'eux est situé symétriquement avec un vecteur z'_k par rapport à l'axe des X (les modules ont des valeurs réciproques). Or, si le polygone limite est situé tout d'un côté de l'axe des X, alors tous les vecteurs $\frac{1}{z'_k}$ se trouveront de l'autre côté de cet axe. Les composantes $V_{y'_k}$ s'étendront toutes le long de la partie positive (ou négative) de l'axe des Y. Jamais la somme de ces $V_{y'_k}$ ne s'annulera; par conséquent le vecteur $\sum \frac{1}{z'}$ ne s'annulera pas non plus, car pour cela il est indispensable qu'à la fois $\Sigma V_{x'} = 0$ et $\Sigma V_{y'} = 0$.

Il s'ensuit immédiatement qu'il est impossible que ζ se trouve en dehors du polygone limite de $f(z)$.

Le théorème renferme le cas des zéros multiples; on sait qu'un zéro de multiplicité p de $f(z)$ est un zéro de multiplicité $p-1$ de la dérivée. Les $p-1$ racines égales de $f'(z)$ sont représentées par le même point que les p racines multiples de $f(z)$.

Le théorème de F. Lucas en est une conséquence immédiate : quand les zéros de $f'(z)$ sont enfermés tous dans le polygone limite de $f(z)$, ou bien dans les sommets de celui-ci, ils se trouvent à plus forte raison dans un contour convexe, qui entoure ce polygone.

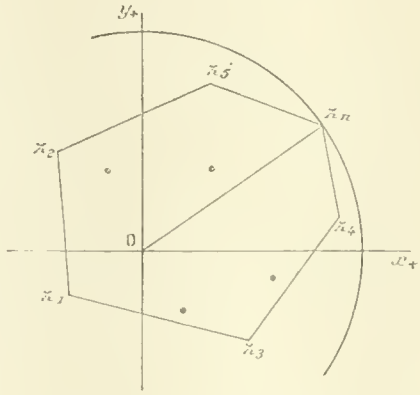
Maintenant, appelons un zéro plus grand qu'un autre, quand son module surpasse celui du second. Alors du théorème I découle comme corollaire :

Théorème II. — *Le module du zéro maximum de la dérivée d'un polynome ne peut pas surpasser celui du zéro maximum du polynome.*

En effet, soit z_n le zéro maximum de $f(z)$. Alors Oz_n surpasse tous les autres modules Oz_1, Oz_2, etc.

Un cercle décrit du point O avec le rayon Oz_n embrasse tout le

Fig. 3.



polygone limite de $f(z)$ à l'exception du sommet z_n qui est située sur sa circonférence. Quand z_n est multiple, un zéro simple ou multiple de $f'(z)$ tombe sur ce point et possède le même module que celui-ci; autrement tous les zéros de $f'(z)$ sont situés à l'intérieur du cercle et par conséquent leurs modules sont moindres que celui de z_n.

A ce théorème nous rattacherons le suivant :

Théorème III. — *Le module du zéro* minimum *d'un polynome $f(z)$ du degré n ne peut pas surpasser celui du zéro minimum de $nf(z) - zf'(z)$.*

Démonstration. — On peut obtenir l'équation $nf(z) - zf'(z) = 0$ de la manière suivante :

Formez la transformée en $\frac{1}{z}$ de l'équation $f(z) = 0$; elle peut être représentée par

$$z^n f\left(\frac{1}{z}\right) = 0. \tag{2}$$

Formez la dérivée de celle-ci

$$(3) \qquad z^n f'\left(\frac{1}{z}\right) x - \frac{1}{z^2} + n z^{n-1} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0.$$

Transformez cette dernière équation [du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré] encore une fois en remplaçant z par $\frac{1}{z}$; il vient

$$z^{n-1}\left[\frac{1}{z^n} f'(z) x - z^2 + \frac{n}{z^{n-1}} f(z)\right] = 0$$

ou

$$(4) \qquad -z f'(z) + n f(z) = 0.$$

L'équation (2) possède les racines $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \ldots, \frac{1}{z_n}$, desquelles $\frac{1}{z_1}$ a le module *maximum* (¹).

Appelons les racines de (3) $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$.

Alors nous aurons

$$(5) \qquad |\zeta_{n-1}| \leq \left|\frac{1}{z_1}\right|.$$

Ensuite $\frac{1}{\zeta_{n-1}}$ devient la racine *minimum* de (4).

De (5) il s'ensuit alors

$$\left|\frac{1}{\zeta_{n-1}}\right| \geq |z_1|$$

ou bien

$$|z_1| \leq \zeta_1. \qquad \text{C. Q. F. D. (²).}$$

Le cas $|z_1| = |\zeta_1|$ se présente, quand $f(z)$ a des zéros multiples; alors $f(z)$ et $f'(z)$ et par conséquent $nf(z) - zf'(z)$ s'annulent à la fois.

Pour l'équation $nf(z) - zf'(z) = 0$ nous proposons le nom de *réduite;* comme la dérivée elle est du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré; elle a des rapports analogues avec $f(z) = 0$.

Remarquons que cette réduite peut se mettre sous des formes

(¹) Nous supposons les zéros z_k ordonnés par rapport aux modules croissants.

(²) ζ_k sont les zéros de $nf(z) - zf'(z)$.

remarquables. De $nf(z) - zf'(z) = 0$ on tire

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = n;$$

$$\frac{z}{z-z_1} + \frac{z}{z-z_2} + \ldots + \frac{z}{z-z_n} = n:$$

$$\frac{z}{z-z_1} - 1 + \frac{z}{z-z_2} - 1 + \ldots + \frac{z}{z-z_n} - 1 = 0$$

$$(6) \qquad \frac{z_1}{z-z_1} + \frac{z_2}{z-z_2} + \ldots + \frac{z_n}{z-z_n} = 0.$$

En posant

$$f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

on trouve

$$(7) \qquad nf(z) - zf'(z)$$
$$\equiv a_1 z^{n-1} + 2a_2 z^{n-2} + 3a_3 z^{n-3} + \ldots + (n-1)a_{n-1} z + na_n = 0.$$

Pour la réduite d'un polynome $f(z)$ nous pouvons énoncer un théorème comparable à celui de F. Lucas concernant la dérivée :

Théorème IV. — *Quand tous les zéros du polynome $f(z)$ sont situés en dehors d'un cercle, décrit de l'origine comme centre avec un rayon* R, *alors tous les zéros de $nf(z) - zf'(z)$ se trouvent aussi en dehors du même cercle.*

Démonstration. — La transformée en $\frac{1}{z}$ aura les zéros $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \ldots, \frac{1}{z_n}$. Quand $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont situés tous en dehors du cercle de rayon R, alors $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \ldots, \frac{1}{z_n}$ se trouvent à *l'intérieur* d'un cercle de rayon $\frac{1}{R}$. Formez maintenant la dérivée. Les zéros en sont situés tous à l'intérieur du même cercle. Formez enfin la transformée de cette dérivée en $\frac{1}{z}$: tous les zéros de celle-ci se trouveront *en dehors* du cercle de rayon R.

Les théorèmes précédents fournissent des limites pour les modules des zéros complexes des polynomes. Le théorème I donne une limite inférieure pour le module du zéro maximum, le théorème III procure une limite supérieure pour le module du zéro minimum; car on peut

continuer aisément la dérivation ou la *réduction* jusqu'à ce qu'on ait obtenu une équation carrée ou linéaire.

Posons

$$f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0.$$

On trouve

$$f^{(n-2)}(z) \equiv n(n-1)\ldots 3 a_0 z^2 + (n-1)\ldots 2 a_1 z + (n-2)\ldots 1 a_2;$$
$$f^{(n-1)}(z) \equiv n(n-1)\ldots 2 a_0 z + (n-1)(n-2)\ldots 1 a_1.$$

Quant aux réduites successives on a

$$f_1(z) \equiv a_1 z^{n-1} + 2 a_2 z^{n-2} + 3 a_3 z^{n-3} + \ldots + (n-1) a_{n-1} z + n a_n;$$
$$f_{n-2}(z) \equiv (n-2)(n-3)\ldots 1 . a_{n-2} z^2 + (n-1)(n-2)\ldots 2 a_{n-1} z + n(n-1)\ldots 3 a_n;$$
$$f_{n-1}(z) \equiv (n-1)(n-2)\ldots 1 . a_{n-1} z + n(n-1)\ldots 2 a_n.$$

On en déduit aisément

$$|z_n| \leqq \sqrt{\frac{2|a_2|}{n(n-1)a_0}}, \qquad |z_n| \geqq \frac{|a_1|}{n};$$
$$|z_1| \leqq \sqrt{\frac{n(n-1)|a_n|}{2|a_{n-2}|}}, \qquad |z_1| \leqq \frac{n|a_n|}{a_{n-1}}.$$

Il y a plus : parce que le produit de tous les modules de $z_1, z_2, \ldots, z_n$ est égal à $\left|\frac{a_n}{a_0}\right|$, il est évident que

$$|z_n| \geqq \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{a_0}\right|}, \qquad |z_1| \leqq \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{a_0}\right|}.$$

A l'aide des dérivées consécutives on trouve en général

$$|z_n| \leqq \sqrt[n-k]{\frac{k(k-1)\ldots 1|a_{n-k}|}{n(n-1)\ldots(n-k+1)|a_0|}}.$$

Les réduites procurent l'inégalité

$$|z_1| \leqq \sqrt[n-k]{\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)|a_n|}{k(k-1)\ldots 1|a_k|}}.$$

Pour des applications pratiques on peut choisir la valeur de k la plus favorable.

Par rapport aux racines réelles la réduite possède une propriété remarquable.

Théorème V. — *Entre deux racines consécutives réelles et* de même signe *d'une équation algébrique se trouve toujours une racine réelle de la réduite.*

Démonstration. — Soit

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} - n \equiv \frac{z_1}{z - z_1} + \ldots + \frac{z_k}{z - z_k} + \frac{z_{k+1}}{z - z_{k+1}} + \ldots + \frac{z_n}{z - z_n} = 0.$$

Posez d'abord $z = z_k + \Delta$; alors

$$\frac{z_k}{z - z_k} = \frac{z_k}{+\Delta}.$$

Mettez ensuite $z = z_{k+1} - \Delta$; alors

$$\frac{z_{k+1}}{z - z_{k+1}} = \frac{z_{k+1}}{-\Delta}.$$

On peut toujours choisir Δ assez petit pour que les termes considérés déterminent le signe du premier membre de l'équation.

Or on voit que, quand z_k et z_{k+1} ont le même signe, les expressions $\frac{z_k}{+\Delta}$ et $\frac{z_{k+1}}{-\Delta}$ *seront de signes contraires.* Quand z_k et z_{k+1} sont des racines *consécutives* de $f(z)$, la fonction $\frac{zf'(z)}{f(z)} - n$ reste continue entre ces deux valeurs de z; par conséquent elle passera par zéro entre z_k et z_{k+1}.

Remarque I. — Par la transformation $z = \sqrt{z'}$, ou $z' = z^2$, on obtient une équation *du même degré* dont toutes les racines sont les *carrés* de celles de $f(z)$; les racines réelles de cette transformée seront toutes *positives* et par conséquent *de même signe* [abstraction faite des racines particulières de $f(z)$ de la forme ki].

De cette considération découle :

Théorème VI. — *Entre deux racines consécutives réelles de la*

transformée en z^2 d'une équation algébrique se trouvent en général deux racines réelles, l'une de la dérivée, l'autre de la réduite.

Remarque II. — Après un nombre très limité de transformations $z^2 = z^1$ on obtient une équation *finale*, $F(z) = 0$, dans laquelle deux racines de modules différents de $f(z) = 0$ se sont transformées en deux autres d'*ordres* [1] différents, c'est-à-dire dont on peut négliger la plus petite par rapport à l'autre (entre les limites fixées du calcul). Pour cette équation finale nous pouvons énoncer :

THÉORÈME VII. — *Entre deux racines simples, consécutives, réelles ou complexes de l'équation finale d'une équation algébrique se trouvent toujours et une racine de la dérivée et une autre de la réduite (de cette équation finale).*

Démonstration. — Soit $F(Z) = 0$ l'équation finale de $f(z) = 0$. Considérons :

$$(8)\quad \frac{Z\,F'(Z)}{F(Z)} = \frac{Z}{Z - Z_1} + \ldots + \frac{Z}{Z - Z_k} + \frac{Z}{Z - Z_{k+1}} + \ldots + \frac{Z}{Z - Z_n} = 0.$$

Quand z_{k+1} et z_k étaient de modules différents, alors Z_{k+1} et Z_k [2] seront *d'ordres* différents; la même relation existera entre Z_{k-p} et Z_k; entre Z_k et Z_{k+q}; à plus forte raison entre Z_{k-p} et Z_{k+q}.

Posez

$$Z = \frac{k-1}{k} Z_k, \qquad \text{d'où} \qquad Z - Z_k = -\frac{Z_k}{k}.$$

Alors

$$\frac{Z}{Z - Z_k} = -k + 1.$$

Ensuite

$$\lim \frac{Z}{Z - Z_{k+p}} = \lim \frac{\frac{k-1}{k} Z_k}{\frac{k-1}{k} Z_k - Z_{k+p}} = \lim \frac{\frac{k-1}{k} \frac{Z_k}{Z_{k+p}}}{\frac{k-1}{k} \frac{Z_k}{Z_{k+p}} - 1} = 0.$$

---

(1) Méthode de Graeffe; *voir*, par exemple, E. CARVALLO, *Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes;* B. GONGGRYP, *Benadering van Nulpunten en Oneindigheidspunten.*

(2) Et à plus forte raison Z_{k-q} et Z_{k+p}; nous supposons toujours les Z_1, Z_2, etc. ordonnés par rapport aux modules croissants.

Au contraire

$$\lim \frac{Z}{Z - Z_{k-q}} = \lim \frac{\frac{k-1}{k} Z_k}{\frac{k-1}{k} Z_k - Z_{k-q}} = \lim \frac{1}{1 - \frac{k}{k-1} \frac{Z_{k-p}}{Z_k}} = 1.$$

Alors il y aura $k - 1$ termes précédant $\frac{Z}{Z - Z_k}$ qui tendent vers l'unité, tandis que ceux qui suivent après ce terme s'annulent. Par conséquent la valeur du premier membre de (8) est en effet égale à zéro, quand on prend

$$Z = \frac{k-1}{k} Z_k.$$

Or, quant au module de cette expression, on a évidemment

$$|Z_{k-1}| < \frac{k-1}{k} |Z_k| < |Z_k|.$$

Le facteur $\frac{k-1}{k}$ étant réel, l'argument de $\frac{k-1}{k} Z_k$ sera évidemment égal à $\arg Z_k$, ou, ce qui revient au même, à $\arg (Z_k - Z_{k-1})$ (¹).

Par conséquent la racine en question de la dérivée, que nous appellerons ζ_{k-1}, est située sur la droite passant par Z_{k-1} et Z_k.

Regardons maintenant la réduite ou plutôt

$$\frac{Z_1}{Z - Z_1} + \ldots + \frac{Z_k}{Z - Z_k} + \frac{Z_{k+1}}{Z - Z_{k+1}} + \ldots + \frac{Z_n}{Z - Z_n} = 0.$$

Posons

$$Z = \frac{n-k+1}{n-k} Z_k, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{Z_k}{Z - Z_k} = n - k.$$

Ensuite

$$\lim \frac{Z_{k-p}}{Z - Z_{k-p}} = \lim \frac{Z_{k-p}}{\frac{n-k+1}{n-k} Z_k - Z_{k-p}} = \lim \frac{\frac{Z_{k-p}}{Z_k}}{\frac{n-k+1}{n-k} - \frac{Z_{k-p}}{Z_k}} = 0.$$

Au contraire

$$\lim \frac{Z_{k+q}}{Z - Z_{k+p}} = \lim \frac{Z_{k+p}}{\frac{n-k+1}{n-k} Z_k - Z_{k+p}} = \lim \frac{1}{\frac{n-k+1}{n-k} \frac{Z_k}{Z_{k+p}} - 1} = -1.$$

(¹) L'ordre de Z_k est supposé *supérieur* à celui de z_{k-1}.

On voit qu'il y aura $k-1$ termes qui tendent vers zéro et $n-k$ autres qui tendent vers -1, tandis qu'un seul d'entre eux est égal à $n-k$; alors les n termes s'annulent ensemble.

Par conséquent les $n-1$ racines de la réduite seront

$$z_k = \frac{n-k+1}{n-k} Z_k.$$

Il est aisé de voir que ces racines sont situées également sur les droites qui lient les couples de racines consécutives de $F(Z)=0$. Seulement une racine de la réduite se trouve dans le voisinage *de la plus petite*, tandis qu'une racine de la dérivée est toujours située auprès *de la plus grande* racine d'un tel couple.

Il va sans dire qu'à la rigueur ces propriétés n'appartiennent qu'à *l'équation finale* d'une équation algébrique. Cependant, rappelons qu'en général, après un nombre très limité de transformations $z^2 = z^1$ [1], l'état final est réalisé entre les limites fixées du calcul.

Il s'ensuit :

Après un nombre très limité de transformations $z^2 = z^1$, toute équation algébrique se transforme en une autre, dont deux racines consécutives comprennent entre elles toujours une racine de la dérivée aussi bien qu'une racine de la réduite; ces racines intermédiaires de $f'(z)$ et de $f_1(z)$ se trouvent approximativement sur la droite qui lie les deux zéros consécutifs de $f(z)$.

C'est ainsi que les propriétés de la dérivée et de la réduite des polynomes à zéros réels paraissent les limites vers lesquelles tendent les propriétés des polynomes plus généraux à zéros complexes.

Remarque. — Il est aisé de démontrer que le dernier théorème renferme le cas où Z_k et Z_{k+1} ou bien Z_{k+p} seraient de modules égaux, mais d'arguments différents.

---

[1] Ou bien après la transformation $z^p = Z$, le nombre p étant supposé suffisamment élevé.

Sur le développement des intégrales du problème des trois corps.

(PREMIÈRE PARTIE.)

PAR K. BOHLIN.

Arrivé à l'achèvement des recherches poursuivies dans plusieurs Mémoires et Notes insérés dans les *Annales de l'Observatoire* et dans les *Archives de l'Académie des Sciences* (¹), il me sera permis de donner, dans les pages suivantes, quelques renseignements, d'une part sur l'orbite de v. Hærdtl, soigneusement recalculée par M. S. Thye, et, d'autre part, sur la manière de déduire de l'orbite ainsi déterminée les expressions analytiques qui font représenter le mouvement dans le problème des trois corps dont il s'agit.

1. On sait qu'il s'agit, dans le problème considéré, du mouvement d'un corps C de masse nulle, attiré par deux autres corps A, B, dont chacun décrit autour de l'autre une orbite circulaire. En prenant pour origine des coordonnées le centre de gravité des corps A et B, et en désignant par r le rayon vecteur du corps C et par v la longitude du rayon vecteur r par rapport à la situation de la ligne AB à l'origine du mouvement, par x, y les coordonnées rectilignes correspondantes, par w la longitude du rayon vecteur AB ($r_1 = 1$) par rapport à

(¹) *Voir* en particulier : *Développement des intégrales du problème des trois corps* (*Arkiv för Math. Astron. Physik, Vet. Akad. Stockholm*. Première Partie : Bd. VIII, n° 35. Deuxième Partie : Bd. IX, n° 23. Troisième Partie : Bd. IX, n° 34. Quatrième Partie : Bd. X, n° 8. Cinquième Partie : Bd. X, n° 26. Sixième Partie, Bd. X, n° 33).

la même direction initiale, M. Thye a calculé les valeurs de ces coordonnées, s'accordant, en effet, au moins à cinq décimales, avec le calcul de v. Hærdtl (¹). Voici le Tableau des valeurs obtenues par M. Thye. L'unité du temps fut choisie de manière que (²)

$$t = \frac{c_0}{2,5} = \frac{2w}{2,5}.$$

TABLE I.

w.	c.	$\log r$.	x.	y.
°	° ′ ″			
0,0	0. 0. 0,00	0,3010300	+2,0000000	+0,0000000
2,5	3.44.57,01	3010414	+1,9957721	1307808
5,0	7.29.36,17	3010755	9831276	2608507
7,5	11.13.39,89	3011313	9621797	3895097
10,0	14.56.51,13	3012073	9331140	5160796
12,5	18.38.53,66	3013012	8961830	6399138
15,0	22.19.32,23	3014096	8516979	7604041
17,5	25.58.32,83	3015285	8000234	8769888
20,0	29.35.42,77	3016526	7415675	+0,9891556
22,5	33.10.50,74	3017751	6767705	+1,0964442
25,0	36.43.47,11	3018881	6061006	1984485
27,5	40.14.23,66	3019822	5300438	2948151
30,0	43.42.33,87	3020465	4490952	3852409
32,5	47. 8.12,69	3020685	3637561	4694711
35,0	50.31.16,58	3020340	2745265	5472943
37,5	53.51.43,42	3019274	1819023	6185401
40,0	57. 9.32,64	3017313	+1,0863700	6830744
42,5	60.24.44,75	3014269	+0,9884093	7407942
45,0	63.37.21,69	3009935	8884862	7916250
47,5	66.47.26,32	3004087	7870572	8355144
50,0	69.55. 2,73	2996484	6845668	8724317
52,5	73. 0.16,01	2986866	5814490	9023627
55,0	76. 3.12,13	2974948	4781280	9253053
57,5	79. 3.57,79	2960425	3750228	9412705
60,0	82. 2.40,64	2942962	2725448	9502775
62,5	84.59.28,97	0,2922193	+0,1711044	+1,9523505

(¹) E. v. HERDTL, *Skizzen zu einem speciellen Falle des Problems der drei Korper* (*Abh. d. bayer. Akad. d. Wissensch.* II. Classe, Bd. XVII. III. Abth., München, 1890). Dans le Mémoire de v. Hærdtl, les coordonnées x, y furent désignées par x_0, y_0 (*loc. cit.*, p. 45).

(²) $t = 0$ correspond à $w = 0$ et $t = 95,5$ à $w = 119°.3750$.

TABLE I (*suite*).

w.	v.	$\log r$.	x.	y.
65°,0	87°.54′.31″,70	0,2897715	+0,0711127	+1,9475209
67,5	90.47.58,39	2869078	—0,0270158	9358226
70,0	93.39.59,24	2835779	1228586	9172912
72,5	96.30.45,00	2797250	2159805	8919668
75,0	99.20.26,64	2752839	3059263	8598885
77,5	102. 9.15,41	2701793	3922147	8210987
80,0	104.57.23,08	2643234	4743344	7756429
82,5	107.45. 0,36	2576119	5517227	7235708
85,0	110.32.18,28	2499197	6237678	6649390
87,5	113.19.25,50	2410947	6897774	5998192
90,0	116. 6.28,12	2309486	7489660	5283025
92,5	118.53.26,70	2192449	8004217	4505147
95,0	121.40.12,45	2056803	8430683	3666371
96,25	123. 3.23,18	1980811	8606922	3224959
97,50	124.26.19,00	1898589	8756064	2769447
98,75	125.48.51,55	1809431	8876016	2300419
100,0	127.10.49,01	1712512	8964411	1818619
101,25	128.31.54,80	1606862	9018607	1325000
102,50	129.51.45,49	1491331	9035595	0820782
103,75	131. 9.48,06	1364557	9011952	+1,0307567
105,00	132.25.15,51	1224912	8943756	+0,9787464
106,25	133.37. 0,59	1070451	8826503	9263290
107,50	134.43.25,82	0898857	8655004	8738842
108,75	135.42. 8,14	0707404	8423328	8219334
110,00	136.29.34,33	0492982	8124733	7712008
110,625	136.47.29,44	0376125	7948056	7465937
111,250	137. 0.23,83	0252305	7751838	7227032
111,875	137. 7.11,32	0,0121188	7535143	6997228
112,500	137. 6.29,92	9,9982564	7297062	6778879
113,125	136.56.39,52	9836434	7036827	6574747
113,750	136.35.38,65	9683159	6753884	6388156
114,375	136. 1. 3,29	9523670	6448071	6223006
115,000	135.10. 8,15	9359754	6119799	6083817
115,625	133.59.53,38	9194442	5770334	5975740
116,250	132.27.23,87	9032434	5402164	5904393
116,875	130.30.22,50	8880455	5019326	5875577
117,500	128. 8. 3,01	8747282	4627738	5894729
118,125	125.22.13,51	8643084	4235280	5966139
118,750	122.18. 6,19	9,8577790	—0,3851470	+0,6092035

Table I (*suite*).

w.	v.	$\log r$.	x.	y.
119°,0625	120°.41′.45″,6	9,856218	−0,366606	+0,617532
119,3750	119. 4.17,4	855869	348671	627173
119,6875	117.27. 4,0	856745	331465	638068
120,0000	115.51.27,4	858821	315097	650139
120,3125	114.18.46,8	862038	299669	663292
120,6250	112.50. 8,5	866305	285258	677419
120,9375	111.26.28,3	871510	271927	692411
121,2500	110. 8.27,2	877528	259719	708147
121,5625	108.56.33,9	884226	248660	724513
121,8750	107.51. 3,6	891473	238761	741387
122,1875	106.51.56,2	899145	230003	758667
122,5000	105.59.14,3	907129	222398	776244
122,8125	105.12.38,5	915323	215892	794028
123,1250	104.31.52,7	923641	210454	811935
123,4375	103.56.36,2	932009	206044	829888
123,7500	103.26.27,2	9,940367	−0,202620	+0,847824

Pour l'étude dont il s'agit, j'ai choisi dix-sept points de l'orbite correspondant aux valeurs de t indiquées dans le Tableau qui suit. Pour ces points nous avons interpolé les valeurs des coordonnées r et v. Mais, parce que c'est l'orbite relative à la ligne mobile AB qui relève le caractère de l'orbite plus clairement que l'orbite absolue par rapport au système fixe des coordonnées, nous avons formé les longitudes relatives

$$v - w,$$

en déterminant les coordonnées rectangulaires relatives de C par les formules

$$(1) \qquad x_0 = r\cos(v - w), \qquad y_0 = r\sin(v - w).$$

Ainsi, les valeurs suivantes viennent d'être déterminées :

TABLE II.

Point.	t.	r.	x_0.	y_0.
1...	95,5	0,7175773	+0,7175672	−0,0038019
2...	95,0	0,7207407	+0,7193564	+0,0446486
3...	94,5	0,7316585	+0,7258162	+0,0922766
4...	93,0	0,8002828	+0,7684805	+0,2233607
5...	91,0	0,9296423	+0,8567257	+0,3609099
6...	87,5	1,1490188	+1,0260428	+0,5171849
7...	79,5	1,5003752	+1,3353696	+0,6840423
8...	71,5	1,7124626	+1,5386674	+0,7516846
9...	63,5	1,8444347	+1,6732300	+0,7760410
10...	55,5	1,9251164	+1,7644170	+0,7700044
11...	47,5	1,9713434	+1,8287235	+0,7361826
12...	39,5	1,9946028	+1,8771012	+0,6744854
13...	31,5	2,0035023	+1,9163267	+0,5845607
14...	23,5	2,0046281	+1,9494776	+0,4669821
15...	15,5	2,0027253	+1,9762970	+0,3242836
16...	7,5	2,0007211	+1,9941521	+0,1619942
17...	0,0	2,0000000	+2,0000000	0,0000000

Il suffit de déterminer analytiquement deux coordonnées quelconques, et comme on peut supposer *a priori* que ce sont le rayon vecteur et la coordonnée x_0 qui sont assujettis aux expressions analytiques les plus simples, nous pouvons laisser de côté l'expression de la coordonnée y_0, donnée par la relation

$$y_0 = \sqrt{r^2 - x_0^2}.$$

Ces considérations sont en accord avec les propriétés du problème de deux corps, où le rayon vecteur et la coordonnée x se trouvent donnés par les expressions

$$(2) \qquad r = a(1 - e\cos u), \qquad x = a(\cos u - e),$$

jouissant de la propriété remarquable d'être des fonctions entières soit par rapport à $\cos u$, soit par rapport aux constantes a et e, tandis que l'expression

$$y = a\sqrt{1 - e^2}\sin u$$

se trouve déjà dérangée par la présence de la racine carrée d'une expression du second degré de l'excentricité.

J'ai de plus fait remarquer qu'en supposant

$$r = 0 \qquad \text{pour} \qquad u = ia_1,$$

on aura

$$r = a\left[1 - \frac{\cos u}{\operatorname{ch} a_1}\right], \qquad x = b\left[1 - \frac{\cos u}{\operatorname{ch} a_1}\right] + b'.$$

En posant

$$p(1) = \cos u, \qquad \overline{p}(1) = \cos ia_1,$$

nous aurons les formules simples

$$(3) \qquad r = a\left[1 - \frac{p(1)}{\overline{p}(1)}\right], \qquad x = b\left[1 - \frac{p(1)}{\overline{p}(1)}\right] + b',$$

appropriées à devenir généralisées pour le problème des trois corps. Les expressions (3) sont *autologues*, en ce que les dénominateurs sont donnés en valeurs spéciales des numérateurs. En posant de plus

$$(4) \qquad p(1) = \frac{p(1)}{\overline{p}(1)},$$

les intégrales du problème de deux corps s'expriment par les formules

$$(5) \qquad r = a[1 - p(1)], \qquad x = b[1 - p(1)] + b',$$

mettant en évidence les racines de l'équation

$$r = 0$$

par la condition

$$p(1) = 1$$

ou bien

$$p(1) = \overline{p}(1),$$

ou encore

$$u = ia_1.$$

2. C'est par la généralisation des expressions ainsi formées que nous avons été conduits à poser, pour le problème des trois corps qui nous occupe, les formes analytiques primordiales suivantes :

1. *Rayon vecteur :*

$$(6) \qquad r = A\left[1 - \frac{\cos u + \mu_1 \cos v}{\operatorname{ch} a_1 + \mu_1 \operatorname{ch} b_1}\right] + A_3,$$

où les *coefficients de phase* sont

$$\lambda_1 = 1, \qquad \mu_1 = -1 + \frac{\operatorname{ch} a_1^{-1}}{3},$$

les *modules d'excentricité* a_1, b_1 étant donnés numériquement par les relations

$$\operatorname{ch} a_1 + \operatorname{ch} b_1 = 3,$$

$$\frac{(1+\mu_1)^2}{\operatorname{ch} a_1 + \mu_1 \operatorname{ch} b_1} = 10,$$

donnant

$$a_1 = 1,0252961, \qquad b_1 = 0,8937462;$$
$$\operatorname{ch} a_1 = 1,5733055, \qquad \operatorname{ch} b_1 = 1,4266945.$$

Les valeurs obtenues, dans le cours des recherches, pour le grand axe A et pour la constante libre A_3, sont

$$A = +1,3585744, \qquad \log A = 0,1330834,$$
$$A_3 = +0,0001911.$$

2. *Coordonnée x :*

$$x = B\left[1 - \frac{\cos u + \mu_2 \cos v}{\operatorname{ch} a_2 + \mu_2 \operatorname{ch} b_2}\right] + B_3. \tag{7}$$

où les coefficients de phase sont donnés par

$$\lambda_2 = 1, \qquad 2\mu_2 = -\left[1 + \frac{\operatorname{ch} b_2^{-1}}{3}\right],$$

les modules d'excentricité a_2, b_2 étant donnés par les formules

$$b_2 = a_1,$$

$$\operatorname{ch} a_2 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} b_2 = 1,$$

donnant

$$\operatorname{ch} a_2 = 1,7866527; \qquad \operatorname{ch} b_2 = 1,5733055.$$

Les valeurs obtenues pour B et B_3 sont

$$B = -1,3560219; \qquad \log B = 0,1322667;$$
$$B_3 = +0,0027435.$$

3. *Arguments u, v.* — Les arguments u, v de ces formules, correspondant à l'anomalie excentrique u dans le problème de deux corps,

viennent d'être déterminés par les relations

$$(8)\qquad \begin{cases} m_1 = u - \dfrac{\sin u + \mu_1' \sin v}{\alpha \operatorname{ch} a_1 + \mu_1' \beta \operatorname{ch} b_1}, \\ m_2 = v - \dfrac{\lambda_1'' \sin u + \sin v}{\lambda_1'' \alpha \operatorname{ch} a_1 + \beta \operatorname{ch} b_1}, \end{cases}$$

correspondant à *l'équation de Kepler*

$$m = u - e \sin u.$$

Les *différentielles d'époque* α, β sont ici données par les formules

$$(9)\qquad \begin{cases} \alpha + \beta = 1 + \dfrac{\operatorname{ch} b_2^{-1}}{3}, & \alpha = +1,2458605, \\ \alpha - \beta = 1 + \dfrac{\operatorname{ch} a_2^{-1}}{2}, & \beta = -0,0339923, \end{cases}$$

et les *coefficients de phase* par

$$\mu_1' = 1 - \frac{\operatorname{ch} a_1^{-1}}{2}, \qquad \lambda_1'' = 2 + \frac{\operatorname{ch} b_1^{-1}}{3}.$$

3. Les expressions finies ainsi trouvées fournissent déjà une représentation de l'orbite satisfaisante pour ce qui concerne son caractère général [1]. Cependant, en cherchant à se rapprocher de plus près de l'orbite actuelle, il s'est trouvé qu'il ne faut pas étendre ces expressions d'une manière directe par développement en séries [2], en retenant les coefficients de phase μ_1, μ_2, μ_1', λ_2'' et en procédant, de la manière indiquée, aux multiples successifs des arguments u, v. L'organisme du développement est autre et, on peut ajouter, plus simple. En effet, les quantités qu'il faut adjoindre aux expressions finies citées sont bien des séries infinies autologues, mais leurs *coefficients de phase* se réduisent à

$$\pm 1,$$

---

[1] *Voir* la figure reproduite ci-après.

[2] Voir *Integralentwickelungen des drei Körperproblemes* (*Astron. iakttt. och unders. Stockholms Observatorium*, Bd. IX, n° 2, Stockholm et Upsala, 1908, p. 16).

au lieu des coefficients de phase λ, μ qui entrent dans nos formules primaires [(6), (7), (8)].

4. Remarquons d'abord la manière dont il faut compléter les formules finies données ci-dessus.

1. *Rayon vecteur.* — Les recherches poursuivies ont amené l'expression suivante du rayon vecteur mené du centre de gravité binaire (¹) :

$$r = A\, e^{\Theta(u_1, v_1)} [1 - e_1 \cos u - \mu_1 e_1 \cos v + \eta(u, v)] + A_3, \tag{10}$$

c'est-à-dire l'expression primaire (6) avec les deux fonctions adjointes

$$\eta(u, v) \quad \text{et} \quad \Theta(u_1, v_1).$$

La première, $\eta(u, v)$, représente la variation de l'excentricité ou bien du paramètre de l'orbite, tandis que la seconde, $\Theta(u_1, v_1)$, peut être comprise comme la variation du grand axe de l'orbite. La dernière de ces fonctions dépend des arguments nouveaux

$$\left\{ \begin{aligned} u_1 &= u + \rho(180^\circ + u), \\ v_1 &= v + \rho(180^\circ + v), \end{aligned} \right. \tag{11}$$

le mouvement particulier de ces arguments étant donné par la quantité

$$\rho = 2\left[c - \frac{z}{z + z_1}\right]\tau = -\frac{1}{2z}\frac{\tau^2}{(z + z_1)^2}, \qquad \rho = -0{,}010397, \tag{12}$$

où l'on a à supposer

$$c = 2{,}555555\ldots,$$

et la quantité τ va être définie ci-après.

2. *Arguments u, v pour le rayon vecteur.* — Les équations com-

(¹) Voir *Développement des intégrales du problème des trois corps* (*Arkiv för Math. Astron. Phys. Vetenskaps Akademien, Stockholm*, Bd. VIII, n° 35, p. 12). Pour simplifier l'écriture, nous avons posé

$$e_1 = \frac{1}{\operatorname{ch} a_1 + \mu_1 \operatorname{ch} b_1}.$$

plétées pour ces arguments sont de la forme suivante [1] :

$$(13)\qquad \begin{cases} l+\varepsilon_1-\pi=u-\tau(180^\circ+u)-\quad e'_1\sin u-\mu'_1 e'_1\sin v,\\ l+\varepsilon_2-\pi=v-\tau(180^\circ+v)-\lambda''_1 e''_1\sin u-\quad e''_1\sin v,\end{cases}$$

c'est-à-dire les formules primaires (8) avec les additions suivantes. On a posé

$$(14)\qquad \begin{cases} m_1=l+\varepsilon_1-\pi,\\ m_2=l+\varepsilon_2-\pi,\end{cases}$$

où l'on suppose la longitude moyenne donnée par

$$(15)\qquad l=n_0(1+\nu_0)t-180^\circ.$$

D'autre part, nous avons ajouté aux arguments u, v du second membre les termes

$$-\tau(180^\circ+u),\qquad -\tau(180^\circ+v).$$

Les diverses constantes qui entrent dans ces expressions sont définies par

$$n_0=1^\circ,88888888\ldots.$$

$$\nu_0=\frac{\tau}{2c}=-\frac{1}{2\varkappa}\frac{\tau^2}{c^2}\qquad(\nu_0=-0,0003726),$$

$$\tau=\varkappa\frac{e^2}{c},$$

où il faut supposer

$$\varkappa=\frac{\pi}{180^\circ},\qquad \log\varkappa=8,2418774;$$

$$c=2,555555\ldots,\qquad \log c=0,4074853;$$

$$e=\frac{1}{2}\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta},\qquad \log e=9,7226746.$$

De plus, nous voyons s'ajouter aux équations primaires (8) les fonctions

$$\varepsilon_1=\varepsilon_1(u,v),\qquad \varepsilon_2=\varepsilon_2(u,v)$$

donnant les variations de la *longitude d'époque* et correspondant à la fonction $\eta(u,v)$ dans l'expression du rayon vecteur, et encore la

---

[1] Pour simplifier, nous avons posé

$$e'_1=\frac{1}{\alpha\operatorname{ch}a_1+\mu'_1\beta\operatorname{ch}b_1},\qquad e''_1=\frac{1}{\lambda'_1\alpha\operatorname{ch}a_1+\beta\operatorname{ch}b_1}.$$

fonction

$$\pi = \pi(u_1, v_1)$$

donnant la variation de la *longitude du périhélie des arguments* et qui correspond à la fonction $\Theta(u_1, v_1)$ qui entre dans l'expression du rayon vecteur.

Les développements des fonctions

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \varepsilon_1(u, v), & \pi(u_1, v_1), \\ \varepsilon_2(u, v), & \theta(u_1, v_1), \\ \eta(u, v) \end{cases}$$

viennent d'être déterminés par l'étude des écarts Δr du rayon vecteur de l'orbite actuelle des formules primaires finies [(6), (8)].

3. *Coordonnée x.* — Quant à l'expression de cette coordonnée, il s'est trouvé que les cinq fonctions (A) employées pour la représentation du rayon vecteur ne sont plus suffisantes. Il faut au contraire appliquer à chacune d'elles des termes additifs, de manière qu'on aura pour la coordonnée x, à remplacer

$$\begin{array}{lcl} \varepsilon_1(u, v) & \text{par} & \varepsilon_1(u, v) + \varepsilon(u, v), \\ \varepsilon_2(u, v) & \text{»} & \varepsilon_2(u, v) + \varepsilon(u, v), \\ \eta(u, v) & \text{»} & \eta(u, v) + \omega(u, v), \\ \pi(u_1, v_1) & \text{»} & \pi(u_1, v_1) + \varpi(u, v), \\ \Theta(u_1, v_1) & \text{»} & \Theta(u_1, v_1) - \Omega(u, v). \end{array}$$

Nous aurons ainsi à poser

$$(16) \qquad x = \mathrm{B}\, e^{\Theta - \Omega}[1 - e_2 \cos u - \mu_2 e_2 \cos v + \eta + \omega] + \mathrm{B}_3.$$

Mais cette expression se rapportant à l'axe des x, qui en même temps est l'axe de symétrie momentanée de l'orbite, si l'on désigne par

$$\varphi = \pi + \chi$$

l'angle que cet axe des x forme avec l'axe des x_0, c'est-à-dire la ligne AB joignant les corps A et B, nous aurons

$$(17) \qquad x = x_0 \cos(\pi + \chi) + y_0 \sin(\pi + \chi).$$

L'angle φ nommé l'*axiale* contient, outre la longitude du périhélie

des arguments, la fonction adjointe

$$\chi = \chi(u, v).$$

Les fonctions

$$(\mathrm{B}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon(u, v), & \varpi(u, v), \\ \omega(u, v), & \Omega(u, v), \\ & \chi(u, v) \end{array} \right.$$

viennent d'être déterminées par l'étude des écarts Δx de la coordonnée x_0 de l'orbite actuelle de la formule primaire employée pour la représentation de cette coordonnée.

5. Pour les fonctions (A) et (B), c'est-à-dire

$$\begin{array}{lllll} \varepsilon_1(u, v); & \varepsilon_2(u, v); & \eta(u, v); & \pi(u_1, v_1); & \Theta(u_1, v_1); \\ \varepsilon(u, v); & \omega(u, v); & \varpi(u, v); & \Omega(u, v); & \chi(u, v), \end{array}$$

nous avons adopté des développements autologues soit à *cosinus*, soit à *sinus*, après quoi les recherches ont abouti à la détermination de *certains coefficients* et *des signes* appartenant respectivement aux termes de ces développements.

Considérons d'abord les développements à *cosinus*. Après avoir formé les *combinaisons élémentaires* (coefficients de phase $\lambda = +1$, $\mu = -1$)

$$(a) \qquad \begin{aligned} p_0(00) &= 0, \\ p_0(10) &= \cos u - \cos v; \\ p_1(00) &= \cos(u+v) - \cos(u-v), \\ p_1(10) &= \cos(2u+v) + \cos(u+2v) \\ &\quad - \cos(2u-v) - \cos(u-2v), \\ p_1(20) &= \cos(3u+v) + \cos(u+3v) \\ &\quad - \cos(3u-v) - \cos(u-3v), \\ p_1(11) &= \cos(2u+2v) + \cos(2u+2v) \\ &\quad - \cos(2u-2v) - \cos(2u-2v), \\ p_1(30) &= \cos(4u+v) + \cos(u+4v) \\ &\quad - \cos(4u-v) - \cos(u-4v), \\ p_1(21) &= \cos(3u+2v) + \cos(2u+3v) \\ &\quad - \cos(3u-2v) - \cos(2u-3v); \\ p_2(20) &= \cos(4u+2v) + \cos(2u+4v) \\ &\quad - \cos(4u-2v) - \cos(2u-4v), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

en général,

$$\begin{aligned} p_l(m, n) = \; & \cos[(l+m)u + (l+n)v] + \cos[(l+n)u + (l+m)v] \\ & - \cos[(l+m)u - (l+n)v] - \cos[(l+n)u - (l+m)v], \end{aligned}$$

avec les dénominateurs

$$(b) \qquad \begin{aligned}
\bar{p}_0(10) &= \operatorname{ch} a_1 \qquad\qquad - \operatorname{ch} b_1; \\
\bar{p}_1(00) &= \operatorname{ch}(a_1 + b_1) - \operatorname{ch}(a_1 - b_1), \\
\bar{p}_1(10) &= \operatorname{ch}(2a_1 + b_1) + \operatorname{ch}(a_1 + 2b_1) \\
&\quad - \operatorname{ch}(2a_1 - b_1) - \operatorname{ch}(a_1 - 2b_1), \\
\bar{p}_1(20) &= \operatorname{ch}(3a_1 + b_1) + \operatorname{ch}(a_1 + 3b_1) \\
&\quad - \operatorname{ch}(3a_1 - b_1) - \operatorname{ch}(a_1 - 3b_1), \\
\bar{p}_1(11) &= \operatorname{ch}(2a_1 + 2b_1) + \operatorname{ch}(2a_1 + 2b_1) \\
&\quad - \operatorname{ch}(2a_1 - 2b_1) - \operatorname{ch}(2a_1 - 2b_1), \\
\bar{p}_1(30) &= \operatorname{ch}(4a_1 + b_1) + \operatorname{ch}(a_1 + 4b_1) \\
&\quad - \operatorname{ch}(4a_1 - b_1) - \operatorname{ch}(a_1 - 4b_1), \\
\bar{p}_1(21) &= \operatorname{ch}(3a_1 + 2b_1) + \operatorname{ch}(2a_1 + 3b_1) \\
&\quad - \operatorname{ch}(3a_1 - 2b_1) - \operatorname{ch}(2a_1 - 3b_1); \\
\bar{p}_2(20) &= \operatorname{ch}(4a_1 + 2b_1) + \operatorname{ch}(2a_1 + 4b_1) \\
&\quad - \operatorname{ch}(4a_1 - 2b_1) - \operatorname{ch}(2a_1 - 4b_1), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;
\end{aligned}$$

en général,

$$\begin{aligned} p_l(m, n) = \; & \operatorname{ch}[(l+m)a_1 + (l+n)b_1] + \operatorname{ch}[(l+n)a_1 + (l+m)b_1] \\ & - \operatorname{ch}[(l+m)a_1 - (l+n)b_1] - \operatorname{ch}[(l+n)a_1 - (l+m)b_1], \end{aligned}$$

nous procédons à former les quotients

$$(c) \qquad p_l(m, n) = \frac{p_l(m, n)}{\bar{p}_l(m, n)},$$

après quoi les *fonctions élémentaires*

$$p_l(m),$$

desquelles nos développements se composent immédiatement, sont

formées d'après les relations

$$(d)\qquad \begin{aligned} p_0(0) &= p_0(00),\\ p_0(1) &= p_0(10);\\ p_1(0) &= p_1(00),\\ p_1(1) &= p_1(10),\\ p_1(2) &= p_1(20) + p_1(11),\\ p_1(3) &= p_1(30) + p_1(21);\\ p_2(2) &= p_2(20) + p_2(11),\\ p_2(3) &= p_2(30) + p_2(21),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

et, en général,

$$p_l(m) = p_l(m, 0) + p_l(m-1, 1) + p_l(m-2, 2) + \ldots.$$

Abstraction faite des coefficients particuliers et des signes qu'on aura à attribuer aux fonctions élémentaires

$$p_l(m),$$

tout développement en *cosinus* aura alors la forme générale

$$(1)\qquad f = \begin{vmatrix} p_0(0) \\ p_0(1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1(0) \\ p_1(1) \\ p_1(2) \\ p_1(3) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_2(2) \\ p_2(3) \\ p_2(4) \\ p_2(5) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_3(4) \\ p_3(5) \\ p_3(6) \\ p_3(7) \end{vmatrix} + \ldots.$$

Ce sont les développements qu'on doit attribuer aux fonctions [1]

$$\begin{aligned} &\eta(u, v), \quad \Theta(u_1, v_1),\\ &\omega(u, v), \quad \Omega(u, v). \end{aligned}$$

Les développements en *sinus* sont de deux espèces.

Première catégorie. — Nous avons d'abord à former les combi-

---

[1] Quand les arguments employés sont u_1, v_1, il faut pourtant appliquer les mêmes dénominateurs (b) que pour le cas des arguments u, v.

naisons élémentaires (coefficients de phase : $\lambda = +1$, $\mu = +1$)

$$
(a)\qquad
\begin{aligned}
q_0(00) &= 0,\\
q_0(10) &= \sin u + \sin v;\\
q_1(00) &= \sin(u+v) + \sin(u-v),\\
q_1(10) &= \sin(2u+v) + \sin(u+2v),\\
&\quad + \sin(2u-v) + \sin(u-2v),\\
q_1(20) &= \sin(3u+v) + \sin(u+3v)\\
&\quad + \sin(3u-v) + \sin(u-3v),\\
q_1(11) &= \sin(2u+2v) + \sin(2u+2v)\\
&\quad + \sin(2u-2v) + \sin(2u-2v),\\
q_1(30) &= \sin(4u+v) + \sin(u+4v)\\
&\quad + \sin(4u-v) + \sin(u-4v),\\
q_1(21) &= \sin(3u+2v) + \sin(2u+3v)\\
&\quad + \sin(3u-2v) + \sin(2u-3v);\\
q_2(20) &= \sin(4u+2v) + \sin(2u+4v)\\
&\quad + \sin(4u-2v) + \sin(2u-4v).\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}
$$

engénéral,

$$
\begin{aligned}
q_l(m, n) = {} & \sin[(l+m)u + (l+n)v] + \sin[(l+n)u + (l+m)v]\\
& + \sin[(l+m)u - (l+n)v] + \sin[(l+n)u - (l+m)v],
\end{aligned}
$$

avec leurs dénominateurs

$$
(b)\qquad
\begin{aligned}
\bar{q}_0[10] &= \alpha \operatorname{ch} a_1 + \beta \operatorname{ch} b_1;\\
\bar{q}_1[00] &= (\alpha+\beta)\operatorname{ch}(a_1+b_1) + (\alpha-\beta)\operatorname{ch}(a_1-b_1),\\
\bar{q}_1[10] &= (2\alpha+\beta)\operatorname{ch}(2a_1+b_1) + (\alpha+2\beta)\operatorname{ch}(a_1+2b_1)\\
&\quad + (2\alpha-\beta)\operatorname{ch}(2a_1-b_1) + (\alpha-2\beta)\operatorname{ch}(a_1-2b_1),\\
\bar{q}_1[20] &= (3\alpha+\beta)\operatorname{ch}(3a_1+b_1) + (\alpha+3\beta)\operatorname{ch}(a_1+3b_1)\\
&\quad + (3\alpha-\beta)\operatorname{ch}(3a_1-b_1) + (\alpha-3\beta)\operatorname{ch}(a_1-3b_1),\\
\bar{q}_1[11] &= (2\alpha+2\beta)\operatorname{ch}(2a_1+2b_1) + (2\alpha+2\beta)\operatorname{ch}(2a_1+2b_1)\\
&\quad + (2\alpha-2\beta)\operatorname{ch}(2a_1-2b_1) + (2\alpha-2\beta)\operatorname{ch}(2a_1-2b_1),\\
\bar{q}_1[30] &= (4\alpha+\beta)\operatorname{ch}(4a_1+b_1) + (\alpha+4\beta)\operatorname{ch}(a_1+4b_1)\\
&\quad + (4\alpha-\beta)\operatorname{ch}(4a_1-b_1) + (\alpha-4\beta)\operatorname{ch}(a_1-4b_1),\\
\bar{q}_1[21] &= (3\alpha+2\beta)\operatorname{ch}(3a_1+2b_1) + (2\alpha+3\beta)\operatorname{ch}(2a_1+3b_1)\\
&\quad + (3\alpha-2\beta)\operatorname{ch}(3a_1-2b_1) + (2\alpha-3\beta)\operatorname{ch}(2a_1-3b_1),\\
\bar{q}_2[20] &= (4\alpha+2\beta)\operatorname{ch}(4a_1+2b_1) + (2\alpha+4\beta)\operatorname{ch}(2a_1+4b_1)\\
&\quad + (4\alpha-2\beta)\operatorname{ch}(4a_1-2b_1) + (2\alpha-4\beta)\operatorname{ch}(2a_1-4b_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}
$$

en général,

$$\begin{aligned}\bar{q}_l[m, n] = \quad & [(l+m)\alpha + (l+n)\beta]\,\mathrm{ch}[(l+m)a_1 + (l+n)b_1] \\ & + [(l+n)\alpha + (l+m)\beta]\,\mathrm{ch}[(l+n)a_1 + (l+m)b_1] \\ & + [(l+m)\alpha - (l+n)\beta]\,\mathrm{ch}[(l+m)a_1 - (l+n)b_1] \\ & + [(l+n)\alpha - (l+m)\beta]\,\mathrm{ch}[(l+n)a_1 - (l+m)b_1].\end{aligned}$$

Ayant formé d'après ces formules les quotients

$$(c) \qquad q_l(m, n) = \frac{q_l(m, n)}{\bar{q}_l[m, n]},$$

nous aurons encore à former les fonctions élémentaires

$$(d) \qquad \begin{aligned} q_0(0) &= q_0(00), \\ q_0(1) &= q_0(10); \\ q_1(0) &= q_1(00), \\ q_1(1) &= q_1(10), \\ q_1(2) &= q_1(20) + q_1(11), \\ q_1(3) &= q_1(30) + q_1(21); \\ q_2(2) &= q_2(20) + q_2(11), \\ q_2(3) &= q_2(30) + q_2(21); \end{aligned}$$

en général,

$$q_l(m) = q_l(m, 0) + q_l(m-1, 1) + q_l(m-2, 2) + \ldots.$$

Abstraction faite des coefficients et des signes qu'il faut apporter aux fonctions élémentaires

$$q_l(m),$$

tout développement en *sinus* aura la forme

$$(\mathrm{II}) \qquad f = \begin{vmatrix} q_0(0) \\ q_0(1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1(0) \\ q_1(1) \\ q_1(2) \\ q_1(3) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_2(2) \\ q_2(3) \\ q_2(4) \\ q_2(5) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_3(4) \\ q_3(5) \\ q_3(6) \\ q_3(7) \end{vmatrix} + \ldots.$$

C'est la même forme que (I), abstraction faite de la signification différente des quantités q. Ces développements se rapportent aux fonctions

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1(u, v), \qquad \varepsilon(u, v), \\ &\varepsilon_2(u, v), \qquad \chi(u, v). \end{aligned}$$

La *seconde catégorie* de développements en *sinus* se distingue des formules de la première catégorie seulement en ce point que nous avons à poser (coefficients de phase : $\lambda = +1$, $\mu = -1$)

$$(a) \qquad q_0(10) = \sin u - \sin v,$$

$$(b) \qquad \overline{q}_0(10) = \alpha \operatorname{ch} a_1 - \beta \operatorname{ch} b_1.$$

Pour le reste, les formules précédentes demeurent inchangées. Ces développements se rapportent à la fonction

$$\pi(u_1, v_1).$$

6. Aperçu de la méthode employée pour la détermination des coefficients. — Considérons le cas du rayon vecteur r et ses fonctions adjointes

$$(18) \qquad \eta(u, v); \quad \theta(u_1, v_1); \quad \varepsilon_1(u, v); \quad \varepsilon_2(u, v); \quad \pi(u_1, v_1).$$

Par les recherches poursuivies, nous avons déterminé les coefficients de ces développements, en commençant par les termes (c) de grande amplitude et en passant successivement aux termes d'un ordre de plus en plus élevé, qui reçoivent dans leurs dénominateurs des multiples croissants des modules d'excentricité a, b [*voir* les systèmes (b)].

Supposons qu'à un certain degré d'approximation les formules laissent encore des écarts déterminés

$$\Delta r$$

pour les dix-sept points considérés de l'orbite. En attribuant ces écarts à des variations

$$\Delta\eta, \quad \Delta\theta, \quad \Delta\varepsilon_1, \quad \Delta\varepsilon_2, \quad \Delta\pi,$$

des fonctions (18), il sera facile de former les équations de condition

$$(19) \qquad \Delta r = a\,\Delta\eta + b\,\Delta\theta + c\,\Delta\varepsilon_1 + d\,\Delta\varepsilon_2 + e\,\Delta\pi,$$

par lesquelles on peut déterminer, à l'aide de la méthode des moindres carrés, les inconnues

$$\Delta\eta, \quad \Delta\theta, \quad \ldots, \quad \Delta\pi.$$

En assignant à chacune de ces corrections la forme

$$\Delta\eta = k_\eta\, p_l(m),$$
$$\Delta\theta = k_\theta\, p_{l_1}(m_1),$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$

où les $p_l(m)$, ... sont les *fonctions élémentaires* d'avance calculées et qu'on choisit d'après la comparaison des courbes construites d'une part pour les écarts Δr et, d'autre part, pour les diverses fonctions $p_l(m)$, $q_l(m)$, ..., c'est plutôt les coefficients constants

$$k_\eta, \quad k_\theta, \quad \dots,$$

qu'il faut alors déterminer d'après les équations de condition (19).

On réussit ainsi à trouver ces coefficients avec leurs signes propres, dès que le système des fonctions

$$p_l(m)$$

est formé. Pour le calcul de ces fonctions, j'ai employé les valeurs des arguments u, v données dans le Mémoire *Sur le développement des intégrales du problème des trois corps* (¹).

Il est superflu de les répéter dans cet exposé, et il n'est pas non plus nécessaire de donner ici toutes les valeurs des *fonctions élémentaires* ainsi calculées. Il suffira de donner des exemples du calcul très facile dont il s'agit.

Exemple du calcul de $p_l(m, n)$ et $q_l(m, n)$.

$$l = 1, \qquad m = 3, \qquad n = 0.$$

$4u+v$.	$u+4v$.	$4u-v$.	$u-4v$.
$+\ 1^\circ,87$	$+\ 1^\circ,73$	$+\ 1^\circ,20$	$-\ 0^\circ,96$
$-\ 21,42$	$-\ 19,82$	$-\ 13,70$	$+\ 11,04$
$-\ 44,37$	$-\ 41,08$	$-\ 28,37$	$+\ 22,89$
$-107,95$	$-100,09$	$-\ 68,97$	$+\ 55,86$
$-176,23$	$-163,85$	$-112,34$	$+\ 91,70$
$-261,15$	$-244,11$	$-165,77$	$+137,37$
$-\ 22,24$	$-\ 1,06$	$-240,64$	$+205,34$
$-104,82$	$-\ 82,84$	$290,61$	$+253,97$
$-171,56$	$-150,32$	$-330,26$	$+294,86$

(¹) *Arkiv för Math. Astr. Physik, Vetenskaps Akad. Stockholm*, Bd. VIII, n°35, p. 13-14.

Exemple du calcul de $p_l(m, n)$ et $q_l(m, n)$ (suite).

$$l = 1, \qquad m = 3, \qquad n = 0.$$

$4u+v$.	$v+4v$.	$4u-v$.	$u-4v$.
$-229^\circ,70$	$-210^\circ,19$	$-\ 4^\circ,22$	$+331^\circ,71$
$-282,22$	$-265,14$	$-\ 34,45$	$+\ 5,97$
$-330,68$	$-316,39$	$-\ 62,03$	$+\ 38,21$
$-\ 16,14$	$-\ 4,82$	$-\ 87,73$	$+\ 68,85$
$-\ 59,43$	$-\ 51,08$	$-112,11$	$+\ 98,19$
$-101,22$	$-\ 95,78$	$-135,63$	$+126,57$
$-142,08$	$-139,47$	$-158,61$	$+154,29$
$-180,00$	$-180,00$	$-180,00$	$+180,00$

I.		II.				$p_1(30)$.
$\cos(4u+v)$.	$\cos(u+4v)$.	$\cos(4u-v)$.	$\cos(u-4v)$.	I.	II.	I − II.
+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+2,000	+2,000	0,000
+0,931	+0,941	+0,971	+0,982	+1,872	+1,953	−0,082
+0,714	+0,754	+0,880	+0,921	+1,468	+1,801	−0,333
−0,307	−0,175	+0,358	+0,561	−0,482	+0,919	−1,401
−0,998	−0,960	−0,380	−0,036	−1,558	−0,410	−1,548
−0,155	−0,437	−0,970	−0,736	−0,592	−1,706	+1,114
+0,926	+1,000	−0,491	−0,504	+1,926	−1,395	+3,321
−0,255	+0,125	+0,352	−0,276	−0,130	+0,076	−0,206
−0,989	−0,869	+0,869	+0,421	−1,858	+1,290	−3,148
−0,647	−0,864	+0,997	+0,880	−1,511	+1,877	−3,388
+0,211	−0,084	+0,825	+0,994	+0,127	+1,819	−1,692
+0,872	+0,724	+0,468	+0,786	+1,596	+1,254	+0,342
+0,961	+0,996	+0,040	+0,362	+1,957	+0,402	+1,555
+0,509	+0,628	−0,376	−0,143	+1,137	−0,519	+1,656
−0,194	−0,101	−0,714	−0,596	−0,295	−1,310	+1,015
−0,789	−0,760	−0,931	−0,901	−1,549	−1,832	+0,283
−1,000	−1,000	−1,000	−1,000	−2,000	−2,000	0,000

						$q_1(30)$.
$\sin(4u+v)$.	$\sin(u+4v)$.	$\sin(4u-v)$.	$\sin(u-4v)$.	I.	II.	I + II.
+0,033	+0,030	+0,021	−0,017	+0,063	+0,004	+0,067
−0,365	−0,339	−0,237	+0,191	−0,704	−0,046	−0,750
−0,700	−0,657	−0,476	+0,389	−1,357	−0,087	−1,444
−0,952	−0,984	−0,933	+0,828	−1,936	−0,105	−2,041
−0,066	−0,278	−0,925	+1,000	−0,344	+0,075	−0,269
+0,988	+0,900	−0,246	+0,677	+1,888	+0,431	+2,319
−0,379	−0,018	+0,872	−0,428	−0,397	+0,444	+0,047
−0,967	−0,992	+0,936	−0,961	−1,959	−0,025	−1,984
−0,147	−0,495	+0,495	−0,907	−0,642	−0,412	−1,054

Sin $(4u+v)$.	Sin $(u+4v)$.	Sin $(4u-v)$.	Sin $(u-4v)$.	I.	II.	$q_1(30)$. I + II.
+0,763	+0,503	−0,073	−0,474	+1,266	−0,547	+0,719
+0,977	+0,996	−0,566	+0,104	+1,973	−0,462	+1,511
+0,489	+0,690	−0,883	+0,619	+1,179	−0,264	+0,915
−0,278	−0,084	−0,999	+0,933	−0,362	−0,066	−0,428
−0,861	−0,778	−0,926	+0,990	−1,639	+0,064	−1,575
−0,981	−0,995	−0,699	+0,803	−1,976	+0,104	−1,872
−0,615	−0,650	−0,365	+0,434	−1,265	+0,069	−1,196
−0,000	−0,000	−0,000	+0,000	−0,000	+0,000	0,000

Exemple du calcul de $\overline{p}_l(m, n)$ et $\overline{q}_l(m, n)$.

$$l = 1, \qquad m = 3, \qquad n = 0.$$

$$\begin{aligned}
4a_1 + b_1 &= +4,99495, & 4\alpha + \beta &= +4,94945,\\
4a_1 - b_1 &= +3,20745, & 4\alpha - \beta &= +5,01743,\\
a_1 + 4b_1 &= +4,60030, & \alpha + 4\beta &= +1,10990,\\
a_1 - 4b_1 &= -2,54970, & \alpha - 4\beta &= +1,38182;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(4a_1 + b_1) &= +73,837, & (4\alpha + \beta)\operatorname{ch}(4a_1 + b_1) &= +365,45,\\
-\operatorname{ch}(4a_1 - b_1) &= -12,378, & (4\alpha - \beta)\operatorname{ch}(4a_1 - b_1) &= +62,11,\\
\operatorname{ch}(a_1 + 4b_1) &= +49,762, & (\alpha + 4\beta)\operatorname{ch}(a_1 + 4b_1) &= +55,23,\\
-\operatorname{ch}(a_1 - 4b_1) &= -6,441, & (\alpha - 4\beta)\operatorname{ch}(a_1 - 4b_1) &= +8,90;\\
\dots\dots\dots\dots, & & \dots\dots\dots\dots; & \\
\overline{p}_1(30) &= -104,780, & \overline{q}_1(30) &= +491,69.
\end{aligned}$$

Après avoir déterminé de cette manière [1] les fonctions élémentaires

$$p_l(m, n) \quad \text{et} \quad q_l(m, n)$$

avec leurs dénominateurs

$$\overline{p}_l(m, n) \quad \text{et} \quad \overline{q}_l(m, n)$$

pour les indices

$$l = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$
$$m, n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

nous procédons à la construction des courbes pour les quotients

$$p_l(m, n) = \frac{p_l(m, n)}{\overline{p}_l(m, n)}, \qquad q_l(m, n) = \frac{q_l(m, n)}{\overline{q}_l(m, n)},$$

[1] Il est avantageux d'employer, pour le calcul des fonctions hyperboliques, les Tables de George-F. Becker et C.-E. van Orstrand : *Smithsonian mathematical Tables Hyperbolic Functions*, publication n° 1871, Washington, 1909.

et comme ce sont ces courbes qui, plutôt que les valeurs numériques, sont propres à diriger les recherches, accomplies dans chaque cas individuel par le calcul numérique, ces courbes sont reproduites ci-après (Tableaux I-IV).

Les coefficients

$$R = \frac{\partial r}{\partial m_1} + \frac{\partial r}{\partial m_2},$$

$$D = \frac{\partial r}{\partial m_1} - \frac{\partial r}{\partial m_2},$$

qui sont employés pour réduire les corrections des arguments, c'est-à-dire $\Delta\pi$, $\Delta\varepsilon_1$, $\Delta\varepsilon_2$ à des écarts correspondants Δr, sont donnés dans le Mémoire cité : *Développement des intégrales du problème des trois corps*.

7. Aperçu des développements obtenus par le procédé d'approximation exposé. Rayon vecteur. — *Fonctions* $\varepsilon_1(u, v)$ *et* $\varepsilon_2(u, v)$. — Les développements de ε_1 et ε_2 formés au premier abord sont les plus simples, donnés en effet par les formules

$$\varepsilon_1(u, v) = \varkappa\frac{e}{c}\left[Q_0(0) + \frac{c}{e}Q_1(0) + \frac{c^2}{e^2}Q_2(2) + \ldots\right],$$

$$\varepsilon_2(u, v) = \varkappa\frac{e}{c}\left[Q_0(0) - \frac{c}{e}Q_1(0) + \frac{c^2}{e^2}Q_2(2) - \ldots\right],$$

où l'on a désigné

$$\begin{aligned} Q_0(0) = &+ q_0(0) \\ &- q_0(1), \end{aligned}$$

et pour le reste

$$\begin{aligned} Q_l(m) = &+ q_l(m) \\ &- q_l(m+1) \\ &+ q_l(m+2) \\ &- q_l(m+3). \end{aligned}$$

A chacun de ces développements s'adjoint un terme libre dans la combinaison

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_0,$$

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_0.$$

où

$$\varepsilon_0 = \varkappa\frac{e}{c}(1 - v)\frac{\sin u + \sin v}{\alpha \operatorname{ch} a_1 + \beta \operatorname{ch} b_1}.$$

Fonction $\eta(u, v)$. — L'expression de $\eta(u, v)$ est encore assez régulière et fut tantôt fixée sous la forme [1]

$$\begin{aligned}\eta(u, v) = & \frac{1+c}{2}\,\frac{1+\varkappa_1}{2}\,\eta_1(u, v)_1 \\ & - \frac{1+c}{2}\,\frac{1-\varkappa_1}{2}\,\eta_1(u, v)_2 \\ & + \frac{1-c}{2}\,\frac{1-\varkappa_1}{2}\,\eta_2(u, v)_1 \\ & - \frac{1-c}{2}\,\frac{1+\varkappa_1}{2}\,\eta_2(u, v)_2.\end{aligned}$$

Elle se trouve ainsi composée de quatre développements, savoir :

$$\eta_1(u, v)_1 = +\varkappa\frac{e}{c}\left(P_0 - \frac{c}{e}P_1 - \frac{c^2}{e^2}P_2 + \ldots\right)$$

$$\eta_1(u, v)_2 = +\varkappa\frac{e}{c}\left(P_0 + \frac{c}{e}P_1 - \frac{c^2}{e^2}P_2 - \ldots\right)$$

$$\eta_2(u, v)_1 = +\varkappa\frac{e}{c}\left(P'_0 - \frac{c}{e}P'_1 + \frac{c^2}{e^2}P'_2 - \ldots\right)$$

$$\eta_2(u, v)_2 = +\varkappa\frac{e}{c}\left(P'_0 + \frac{c}{e}P'_1 + \frac{c^2}{e^2}P'_2 + \ldots\right)$$

Il faut supposer

$$\begin{aligned}P_0 = & \; p_0(0) & P'_0 = & + p_0(0) \\ & - p_0(1), & & + p_0(1);\end{aligned}$$

et, pour le reste,

$$\begin{aligned}P_l = & + p_l(m) & P'_l = & + p_l(m) \\ & - p_l(m+1) & & + p_l(m+1) \\ & + p_l(m+2) & & + p_l(m+2) \\ & - p_l(m+3), & & + p_l(m+3).\end{aligned}$$

Le terme libre adjoint à $\eta(u, v)$ est de la forme

$$\begin{aligned}\eta_0 = & -\varkappa\frac{1+c}{c}\,\frac{1-c}{c}\,\frac{\cos u - \cos v}{\operatorname{ch} a_1 - \operatorname{ch} b_1} \\ & - 2\varkappa^2\frac{1+c}{c}\,\frac{\cos u - \cos v}{\operatorname{ch} a_1 - \operatorname{ch} b_1}.\end{aligned}$$

---

[1] La quantité $\varkappa_1$ qui entre parfois dans les formules a la valeur

$$\varkappa_1 = -\varkappa\frac{1+c}{c}\,\frac{c}{e}.$$

Fonction $\Theta(u_1, v_1)$. — L'expression de $\Theta(u_1, v_1)$, déjà un peu plus compliquée, s'est trouvée de la forme préliminaire

$$\theta(u_1, v_1) = \frac{\varkappa h}{(4c)^2} \frac{c}{(c+1)(c-1)} \left\{ \left[P_0 + 4c\frac{e}{c} P_1 + (4c)^2 \frac{e^2}{c^2} P_2 + \ldots \right] \right.$$
$$+ (4c)^4 \left[\frac{e^2}{c^2} P_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \right]$$
$$\left. + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right] \Big\},$$

où nous avons obtenu

$$\begin{aligned}
P_0 &= -(c-1)\,p_0(0) \\
&\quad + (c-1)\,p_0(1), \\
P_1 &= -\ c\ \ p_1(0) \\
&\quad +\ c\ \ p_1(2), \\
P_2 &= -(c+1)\,p_2(2) \\
&\quad + (c-1)\,p_2(3) \\
&\quad + (c-1)\,p_2(4) \\
&\quad - (c+1)\,p_2(5), \\
P_3 &= \ \ c\ \ p_3(5).
\end{aligned}$$

La valeur de la constante h est

$$h = (c+1)\frac{c}{e}.$$

Terme libre :

$$\theta_0 = \varkappa^2 (c+1) \frac{c}{e} \frac{\cos u_1 - \cos v_1}{\operatorname{ch} a_1 - \operatorname{ch} b_1}.$$

Fonction $\pi(u_1, v_1)$. — Pour la fonction $\pi(u_1, v_1)$, nous avons obtenu l'expression primaire (coefficients de phase : $\lambda = +1$, $\mu = -1$)

$$\pi(u, v_1) = 2h \left\{ \begin{vmatrix} \star \\ -q_0(1) \end{vmatrix} + \frac{e}{c} \begin{vmatrix} +q_1(0) \\ +q_1(2) \end{vmatrix} + \frac{e^2}{c^2} \begin{vmatrix} -q_2(3) \\ -q_2(5) \end{vmatrix} + \ldots \right\}.$$

Désormais, les termes supplémentaires ci-joints viennent d'être trouvés :

$$\Delta\pi(u_1, v_1) = \frac{c}{e} \Big\{ \quad -\frac{e}{c} q_1(1) - c\frac{e^2}{c^2} q_2(2) + [c(c+1)]^3 . 2c \frac{e^3}{c^3} q_3(6)$$
$$- (c-2)\frac{e}{c} q_1(2) - c\frac{e^2}{c^2} q_2(4) - [c(c-1)]^3 . 2\ \frac{e^3}{c^3} q_3(4)$$
$$+ (c-1)\frac{e}{c} q_1(3) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big\}.$$

Terme libre à ajouter à $\pi + \Delta\pi$:

$$\pi_0 = 2\varkappa^2(c+1)(c-1)\frac{c}{e}\frac{\sin u_1 - \sin v_1}{\alpha \operatorname{ch} a_1 - \beta \operatorname{ch} b_1}$$
$$- 2\varkappa^2(c+1)(c-1)\frac{c}{e}\frac{\sin u - \sin v}{\alpha \operatorname{ch} a_1 - \beta \operatorname{ch} b_1}.$$

8. Aperçu des développements obtenus par le procédé d'approximation exposé. Coordonnée x. — *Fonction* $\omega(u, v)$. — Pour cette fonction, nous avons trouvé l'expression

$$\begin{aligned}\omega(u, v) = \varkappa\Big[& p_0(10) + \frac{c}{e}p_1(0) + \frac{c-2}{2}\frac{c^2}{e^2}p_2(2) - \varkappa\frac{c^3}{e^3}p_3(4) \\ & + \varkappa(c-2)\frac{c}{e}p_1(1) \qquad \star \qquad \star \\ & + \varkappa\frac{c}{e}p_1(2) + \varkappa(c+2)\frac{c^2}{e^2}p_2(4) + \varkappa(c+2)\frac{c^3}{e^3}p_3(5) \\ & \star \qquad \star \qquad \star \Big],\end{aligned}$$

le dernier terme étant presque insensible.

Le terme libre est

$$\omega_0 = 2\varkappa^2 p_0(10).$$

Fonction $\Omega(u, v)$. — Développement trouvé :

$$\begin{aligned}\Omega(u, v) = \varkappa\Big[& \varkappa_1 p_1(0) + 1 . \frac{c}{e}p_1(0) \\ & + \quad \star \\ & - 1 . \frac{c}{e}p_1(2) \\ & + \varkappa_1\frac{c}{e}p_1(3)\Big],\end{aligned}$$

sans terme libre.

Fonction $\chi(u, v)$. — L'expression trouvée pour cette fonction est

$$\begin{aligned}\chi(u, v) = 2\varkappa\frac{c}{e}\Big\{ & 2c \qquad \frac{e}{c}q_1(0) + (2c)^2\frac{c^2}{e^2}q_2(2) \\ & \star \qquad - (c-2)(2c)^2\frac{c^2}{e^2}q_2(3) \\ & - 2c(c-2)\frac{e}{c}q_1(2) \qquad \star \\ & - 2c \quad \varkappa_1 \quad \frac{e}{c}q_1(3) \qquad \star \\ & + (2c)^3\Big[- (2c)^3\frac{c^3}{e^3}q_3(6)\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

Fonction $\varepsilon(u, v)$. — L'expression trouvée que voici :

$$\varepsilon(u, v) = \varkappa \frac{e}{c} \Bigg[\begin{array}{ll} \star & \star \\ \star & -\dfrac{c^2}{e^2} q_2(3) \\ \dfrac{c}{e} q_1(2) & -\dfrac{c^2}{e^2} q_2(4) \\ \star & \star \\ \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{array} \Bigg].$$

Fonction $\varpi(u, v)$ (¹) :

$$\varpi(u, v) = \varkappa \frac{e}{c} \Bigg[\begin{array}{ll} \star & \star \\ \star & +\dfrac{c-2}{2} q_2(3) \\ +(c-2)\dfrac{c}{e} q_1(2) & +\dfrac{c+2}{2} q_2(5) \\ -(c-2)\dfrac{c}{e} q_1(3) & \star \\ \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{array} \Bigg].$$

9. Remarques sur la forme présumable des développements dans le cas général ou l'orbite des deux corps A, B n'est plus circulaire ou homoplane. — Nous avons vu comment les fonctions

$$\eta(u, v), \quad \theta(u_1, v_1), \quad \dots,$$

considérées dans ce qui précède, s'obtiennent par les développements définis, assignés ci-dessus à chacune d'elles. Il faut seulement ajouter — et j'ai fait déjà cette remarque (²) — qu'il faut admettre, au lieu

---

(¹) *Remarque.* — Si l'on fait supprimer le facteur $\varkappa$ dans toutes les formules à *sinus*, ces fonctions seront immédiatement exprimées en degrés sexagésimaux.

(²) *Développements des intégrales du problème des trois corps. Rayon vecteur* (*loc. cit.*, p. 26, 27).

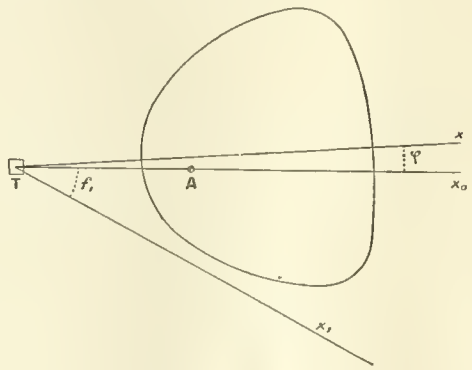
des développements immédiatement trouvés de la forme

$$f(u, v) = P_0 + \frac{c}{e} P_1 + \frac{c^2}{e^2} P_2 + \ldots, \tag{20}$$

les développements plus généraux :

$$f = P_0 + \frac{c}{e} P_1 \cos(\pi + \chi) + \frac{c^2}{e^2} P_2 \cos 2(\pi + \chi) + \ldots, \tag{20 a}$$

où $\varphi = \pi + \chi$ est l'angle, nommé *l'axiale* (¹), formé du périhélie de l'orbite C avec le rayon $r_1 = AB$.



La fonction P_0 de ces formules contient le terme du *premier ordre*

$$P_0 = p_0(1) = h[\cos u - \cos v],$$

et P_1, P_2, ... contiennent des *termes supérieurs* à multiples croissants des arguments u, v.

Reprenons d'un autre côté l'expression primaire finie du rayon vecteur

$$r = A\left[1 - \frac{\lambda \cos u + \mu \cos v}{\lambda \operatorname{ch} a_1 + \mu \operatorname{ch} b_1}\right] + A_3. \tag{21}$$

C'est encore une expression du *premier ordre* de la forme

$$P_0 = p_0(1) = 1 - e_1 \cos u - \mu_1 e_1 \cos v.$$

(¹) Comme, dans le cas présent, l'angle $\pi + \chi$ est très petit, n'excédant guère 2°, l'application des facteurs $\cos(\pi + \chi)$ ... dans la formule ci-dessus n'a pas d'effet sensible sur l'expression.

abstraction faite de la constante A_3. Les coefficients de phase donnés ci-dessus (p. 373) diffèrent ici des valeurs

$$\pm 1.$$

Est-il possible de développer cette expression (21) en une série infinie, procédant suivant les multiples de

$$\pi + \chi,$$

pour en avoir une expression de la forme (20a) citée ci-dessus? On aurait ainsi

$$(21\,a) \qquad r = A\left[P_0 + \frac{c}{e} P_1 \cos(\pi + \chi) + \ldots\right]$$

ou bien approximativement

$$(21\,b) \qquad r = A\left(P_0 + \frac{c}{e} P_1 + \ldots\right),$$

expression qui se trouve en contradiction avec l'expression (21), qui est l'expression de r délivrée de $\pi + \chi$, et qui satisfait à l'orbite actuelle.

Mais considérons le cas où l'orbite AB n'est plus un cercle. Nous pouvons alors assigner à cette orbite une *excentricité*

$$e_3$$

et une *anomalie* (soit l'*anomalie vraie*, soit l'*anomalie excentrique*)

$$f_1 \quad \text{ou} \quad w$$

qui, pour le cas de l'anomalie vraie, n'est autre chose que l'angle formé par l'axe AB avec la direction du périhélie de r_1 (*voir* la figure). Ainsi les deux angles $\pi + \chi$ et f_1 se correspondent mutuellement, exprimant la distance angulaire de la ligne AB d'une part du périhélie de r et, d'autre part, du périhélie de r_1.

Nous venons de remarquer que l'angle

$$\pi + \chi$$

ne peut pas être appliqué pour le développement de l'expression

finie (21) de r, en ajoutant des termes

$$P_1 \cos\ (\pi + \chi),$$
$$P_2 \cos 2(\pi + \chi),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Mais, au contraire, dans le cas général, où l'excentricité e_3 n'est pas nulle, un tel développement est bien possible. Posons, en effet,

$$r = A(P_0 + e_3 P_1 \cos w + e_3^2 P_2 \cos 2w + \dots),$$

où P_0 est donnée par l'expression (21) et P_1, P_2, ... sont les termes supérieurs ([1]) formés avec les coefficients de phase

$$\lambda = 1, \qquad \mu = 1 - \frac{\operatorname{ch} a_1^{-1}}{3},$$

appartenant à l'expression (21). Alors, pour

$$e_3 = 0,$$

l'expression (22) se réduit à l'expression primaire (20) qui correspond au mouvement circulaire de AB. Il s'ensuit que la formule est vraisemblablement un développement appartenant au cas général où l'orbite AB n'est plus circulaire ([2]). Mais ce développement, fondé sur les fonctions

$$P_n = P_n(u, v),$$

ne contient pas l'axiale ou l'angle $\pi + \chi$. Mais, en faisant rentrer l'anomalie w (*excentrique*) dans les fonctions P_n, on peut au contraire supposer la forme

$$r = A[P_0(u, v, w) + P_1(u, v, w)\cos(\pi + \chi) + \dots]. \tag{22}$$

En posant le troisième coefficient de phase

$$\nu = 0$$

([1]) Voir *Integralentwickelungen des Dreikörperproblems* (*Astron. iakttl. och unders. Stockholm Observatorium*, Bd. IX, n° 2, 1902, p. 16 et suiv.).

([2]) Il faut supposer que w soit, dans ce cas, l'*anomalie excentrique*, analogue aux arguments u, v.

et supposant le module de l'excentricité

$$c = \infty \qquad \left(e_3 = \frac{1}{\operatorname{ch} c}\right)$$

pour $e_3 = 0$, l'expression (22) se réduit à la forme finie (21)

$$r = \mathrm{A}\,\mathrm{P}_0(u, v).$$

L'expression (22) paraît ainsi être une généralisation appropriée de la forme finie (6).

Ce que nous avons dit, à cet égard, de r s'applique également à la coordonnée x et aux équations des arguments u, v.

De plus, nous avons trouvé pour les diverses fonctions

$$\eta_1(u, v), \quad \theta(u_1, v_1), \quad \ldots$$

de certains *termes libres*, qu'il faut ajouter aux développements réguliers de ces fonctions. Ces termes libres sont partout de la forme

$$\eta_0, \theta_0 \ldots = \mathrm{P}_0 = p_0(1)$$

ou bien

$$\varepsilon_0, \pi_0 \ldots = \mathrm{Q}_0 = q_0(1).$$

Il est par conséquent indiqué que ces termes libres soient les termes premiers de développements qui, dans le cas général, procèdent suivant les multiples de w ou f_1, c'est-à-dire des séries infinies de la forme

$$\eta_0, \theta_0 \ldots = \mathrm{P}_0 + e_3 \mathrm{P}_1 \cos w + c_3^2 \mathrm{P}_2 \cos 2w + \ldots; \tag{23}$$

mais alors, avec les coefficients de phase

$$\frac{\lambda}{\mu} = +1. \tag{24}$$

Pour $e_3 = 0$, ces séries se réduisent aux termes libres actuellement trouvés dans le cas du mouvement circulaire des corps A, B.

Sur ce point nous pouvons nous demander s'il y a, dans le cas général, des développements à double entrée, procédant suivant les

multiples des deux angles

$$\varphi = \pi + \chi \quad \text{et} \quad w,$$

c'est-à-dire de la forme

$$(25) \qquad \begin{aligned} \eta = P_{00} &+ P_{10}\cos\varphi + P_{20}\cos 2\varphi + \ldots \\ &+ P_{01}\cos w + P_{11}\cos(\varphi + w) + \ldots \\ &+ P_{02}\cos 2w + \ldots. \end{aligned}$$

D'après les résultats obtenus, les fonctions η, Θ, ... sont représentées par des séries régulières

$$(26) \qquad \eta,\ \theta \ldots = P_0 + \frac{c}{e} P_1 \cos\varphi + \frac{c^2}{e^2} P_2 \cos 2\varphi + \ldots,$$

où les fonctions P_0, P_1, P_2, ... forment une suite systématique, de manière que P_0 soit bien définie, dès que les fonctions suivantes P_1, P_2, ... sont connues. En outre, le terme libre

$$(27) \qquad \eta_0,\ \theta_0 \ldots = k P'_0$$

vient s'ajouter.

Si alors on voulait adopter la forme (25) à double entrée, il faudrait supposer, par comparaison avec le développement particulier (26),

$$P_{10} = \frac{c}{e} P_1,$$

$$P_{20} = \frac{c^2}{e^2} P_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, par suite de ces déterminations, aussi

$$(28) \qquad P_{00} = P_0.$$

Mais, d'autre part, et en considérant le développement (26) en soi avec son terme libre (27), on devrait s'attendre à avoir

$$(29) \qquad P_{00} = P_0 + k P'_0.$$

Le terme libre serait cependant, selon (28), superflu. Par cette considération, l'hypothèse (25) paraît bien abrogée et il faut au con-

traire supposer

$$(30)\qquad \begin{aligned}\eta = {} & P_0 + P_1 \cos\varphi + P_2 \cos 2\varphi + \ldots \\ & + P'_0 + P_1 \cos\varpi + P'_2 \cos 2\varpi + \ldots,\end{aligned}$$

c'est-à-dire une expression composée de deux séries indépendantes et parallèles correspondant à l'un et l'autre des arguments φ et ϖ.

Cette circonstance est d'autant plus remarquable qu'elle comporte une simplification notable de la représentation analytique du mouvement dans le cas général du problème qui nous occupe. La forme simple (30), assignée aux fonctions η, Θ, ..., se trouve encore confirmée par la considération de la difficulté de s'imaginer un développement à double entrée comme (25) appliqué pour la représentation de r [*voir* (21), (21 *a*), (21 *b*), (22)]. En cherchant la généralisation de l'expression (21) de r, c'est en effet seulement le développement (22) qui se donne conformément à la nature du problème, toute autre forme du développement paraissant bien exclue.

Toutefois, en adoptant l'expression (30), il faut bien substituer pour ϖ *l'anomalie vraie*

$$f_1$$

appartenant au rayon r_1. En effet, les deux angles

$$\varphi \quad \text{et} \quad f_1$$

se correspondent par rapport à la ligne AB (*voir* la figure) et il faut accepter l'expression

$$(31)\qquad \begin{aligned}\eta = {} & P_0(u, v) + P_1(u, v)\cos\varphi + P_2(u, v)\cos 2\varphi + \ldots \\ & + P'_0(u, v) + e_3 P'_1(u, v)\cos f_1 + e_3^2 P'_2(u, v)\cos 2 f_1 + \ldots\end{aligned}$$

au lieu de (30). Comme on a

$$\varphi = \pi + \chi,$$

il s'ensuit

$$(32)\qquad \varphi + f_1 = \varpi - \varpi_1,$$

où ϖ et ϖ_1 sont les longitudes des périhélies. Ainsi nous aurons

$$(33)\qquad \varphi = -f_1 + \varpi - \varpi_1,$$

et l'axiale contient de cette manière la quantité

$$\varpi - \varpi_1$$

caractéristique pour les perturbations séculaires soit de e, soit de ϖ.

Si de plus nous désignons par

$$l, \quad l_1$$

les longitudes vraies, on aura de même

$$(33a) \qquad \varphi = -(l_1 - \varpi).$$

Si l'orbite de C ne coïncide pas avec l'orbite AB, c'est-à-dire si l'inclinaison des deux orbites n'est pas nulle, il s'ensuit encore une généralisation des formules (31). Dans ce cas, il faut substituer à l'axiale les deux angles

$$\varpi - \Omega \qquad \text{et} \qquad f_1 + \varpi_1 - \Omega = l_1 - \Omega,$$

où Ω soit la longitude commune des nœuds au plan invariable. Le mouvement dépend alors des deux angles

$$\varphi = -f_1 + \varpi - \varpi_1 \qquad \text{et} \qquad \varphi_1 = f_1 + \varpi - \varpi_1 - 2\Omega,$$

ou bien

$$\varphi = l_1 - \varpi \qquad \text{et} \qquad \varphi_1 = l_1 + \varpi - 2\Omega,$$

ou encore de

$$\varphi = \lambda_1 - \omega \qquad \text{et} \qquad \varphi_1 = \lambda_1 + \omega,$$

en posant

$$\lambda_1 = l_1 - \Omega, \qquad \omega = \varpi - \Omega.$$

Il faut alors supposer, au lieu de (31),

$$(34) \qquad \begin{aligned} \eta = \; & P_0(u, v) + P_1(u, v)\cos\varphi + \ldots \\ & + P'_0(u, v) + e_3 P'_1(u, v)\cos f_1 + \ldots \\ & + P''_0(u, v) + f^2 P''_1(u, v)\cos\varphi \cos\varphi_1 + \ldots \\ & + P'''_0(u, v) + f^2 P'''_1(u, v)\cos f_1 \cos\varphi + \ldots \\ & + P^{\text{iv}}_0(u, v) + f^2 P^{\text{iv}}_1(u, v)\cos f_1 \cos\varphi_1 + \ldots \end{aligned}$$

C'est une généralisation de la formule primordiale

$$\eta = P_0(u, v) + P_1(u, v)\cos\varphi + \ldots$$

contenant *quatre* développements adjoints.

L'expression (34) se trouve justifiée par la considération des termes libres trouvés ci-dessus, qui sont composés, en général, de *quatre* termes simples [1], comme on trouve, en résolvant leurs coefficients. Si, au contraire, on cherchait à généraliser l'expression primordiale de η par l'introduction des fonctions à trois variables

$$P_n(u, v, w)$$

comme nous l'avons fait pour le rayon vecteur r, il serait difficile d'en tirer *quatre* développements adjoints. On en obtient, en effet, ou *trois* ou bien *cinq*.

Pour le mouvement AB, circulaire et uniforme dans le cas considéré, nous avons seulement

$$r_1 = A_1, \qquad f_1 = w = n_3 t.$$

Dans le cas général, il faudrait supposer l'expression

$$r_1 = A_1[P_0(u, v, w) + P_1(u, v, w)\cos\varphi + \ldots] \tag{35}$$

qui se réduit, pour

$$\lambda = \mu = 0, \qquad \nu = 1, \qquad c = \infty, \qquad e_3 = \frac{1}{\operatorname{ch} c},$$

à

$$r_1 = A_1 = \text{const.}$$

Quant aux fonctions η, etc., elles n'existent pas dans notre cas pour r_1 et il n'y a pas, par conséquent, de *termes libres*. Il n'est pas possible d'en conclure que ces fonctions vont manquer dans le cas général, quoique cela puisse paraître à un certain degré vraisemblable.

Mais, si la masse de C n'est plus *zéro*, il faut s'attendre à des fonc-

---

[1] Il fut dès lors prouvé que ces termes se réduisent à *deux* au plus (voir *Archives de l'Académie des Sciences*, Bd. X, n° 8, Stockholm, 1914, p. 29) et désormais (*Ibid.*, Bd. X, n° 26, p. 9) qu'ils se doivent même réduire à *un seul* terme, exclusivement lié à l'inclinaison mutuelle des orbites.

tions η, etc., appartenant au rayon r_1, et en général analogues à celles qui valent pour le rayon r. Il y aura alors aussi des *termes libres*. Dans ce cas, on n'aura plus à supposer $c = \infty$.

Remarquons encore que les variations séculaires de e et de ϖ sont données par les équations connues

$$\frac{de}{dt} = \boxed{01}\, e' \sin(\varpi' - \varpi),$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = (01) - \boxed{01}\, \frac{e'}{e} \cos(\varpi' - \varpi),$$

et que par conséquent les expressions de e et de ϖ doivent contenir l'argument

$$\varpi' - \varpi.$$

Cet argument n'est pas représenté par les expressions (34), ce qui peut paraître un défaut de la formule. Mais, par contre, l'argument $\varpi - \varpi'$ va être introduit par l'expression (22) de r et par les équations des arguments y correspondants.

Ces remarques rapides que nous venons de faire sur la forme présumable de la solution, dans le cas le plus général de notre problème, suffiront pour le moment pour guider la considération de ce cas par l'étude d'une orbite convenable. Il faut encore renvoyer à une recherche récemment publiée dans les *Archives de l'Académie des Sciences*, Bd. 33, Stockholm, 1915, sur la représentation, dans le problème dont il s'agit, du mouvement pendulaire et des mouvements séculaires ainsi que sur les développements suivant les puissances de l'inclinaison mutuelle des orbites.

(*A suivre.*)

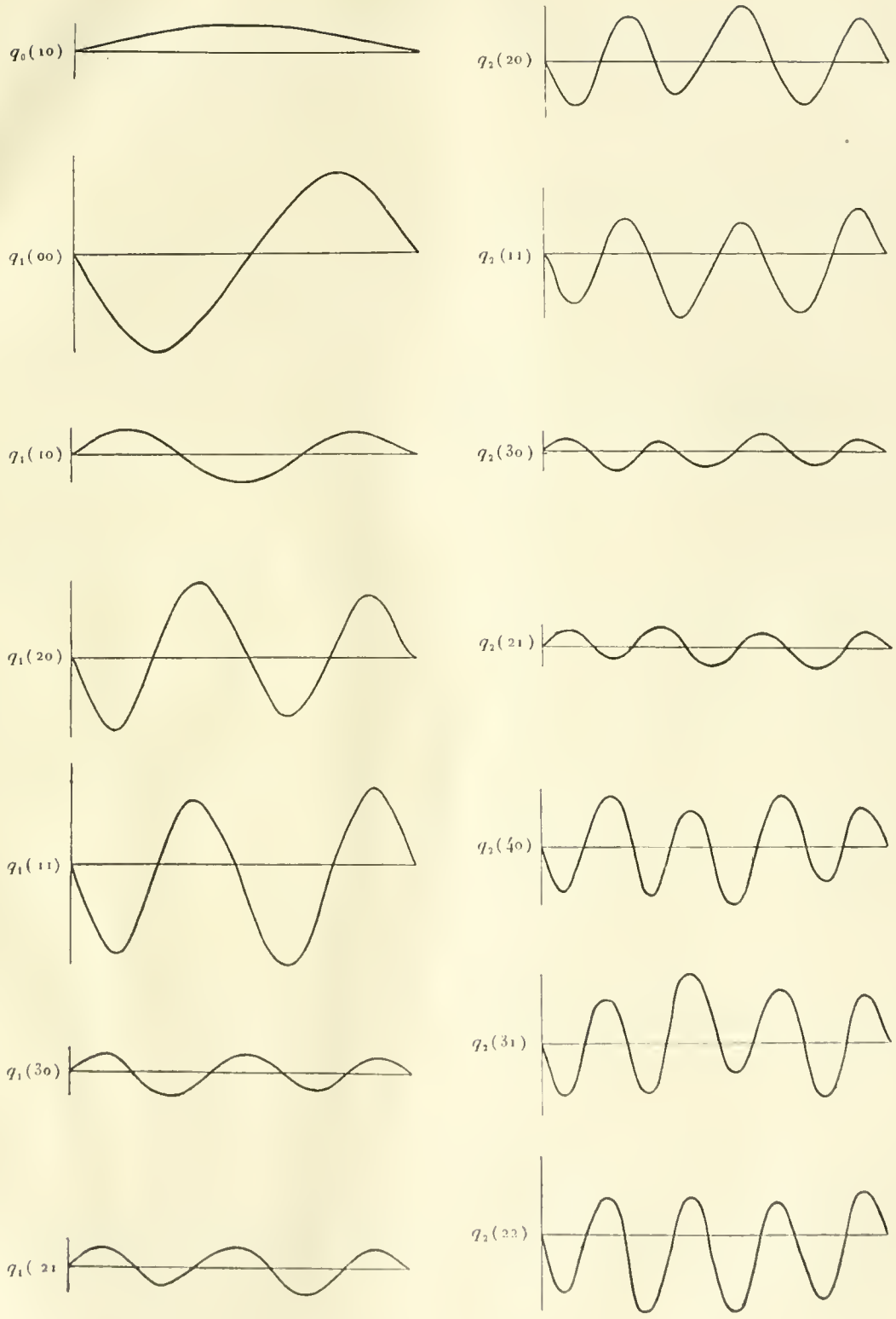

$q_0(10)$
$q_1(00)$
$q_1(10)$
$q_1(20)$
$q_1(11)$
$q_1(30)$
$q_1(21)$
$q_2(20)$
$q_2(11)$
$q_2(30)$
$q_2(21)$
$q_2(40)$
$q_2(31)$
$q_2(22)$

TABLE I. — $\varepsilon(u, v)$ (*suite*).

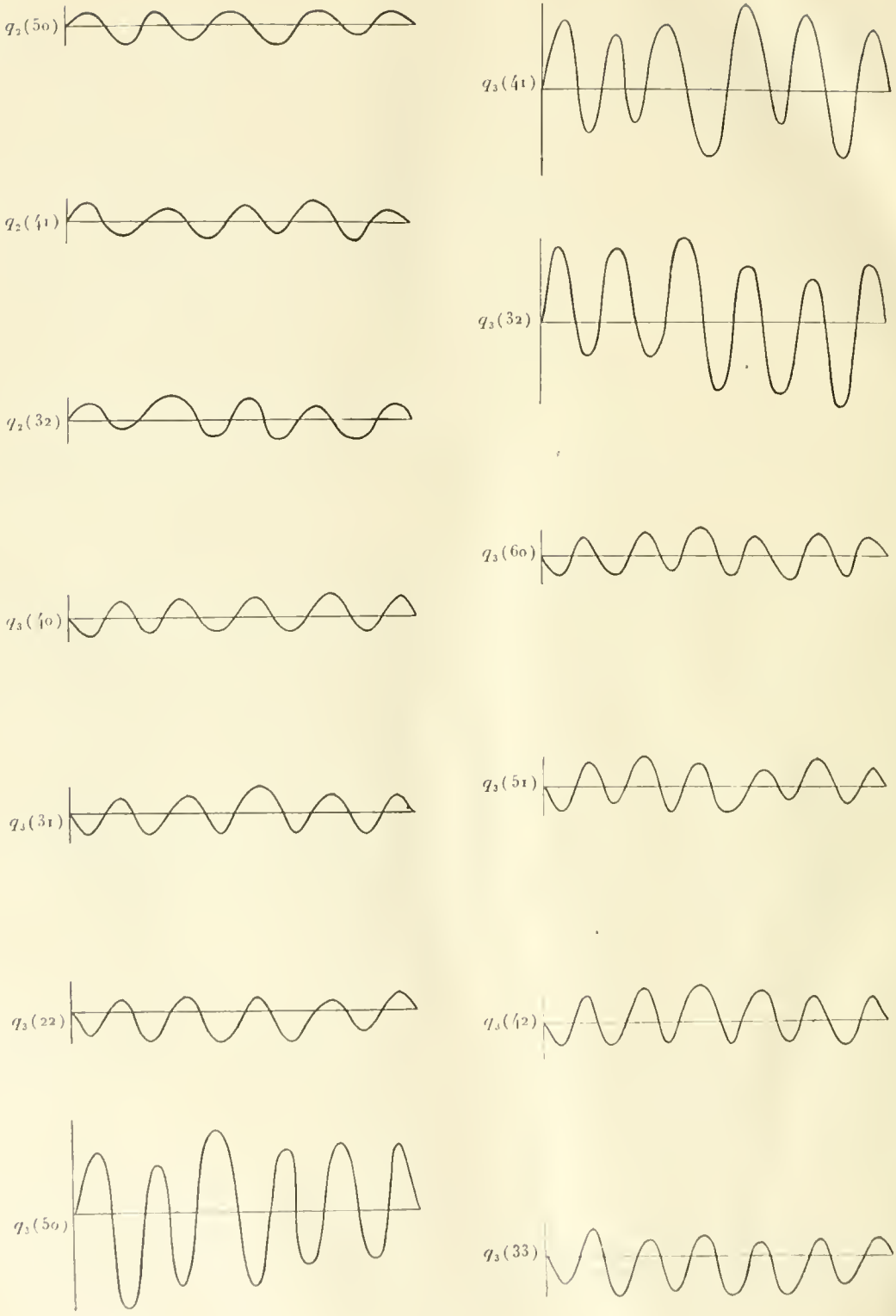


TABLE II. — $\eta(u, v)$.

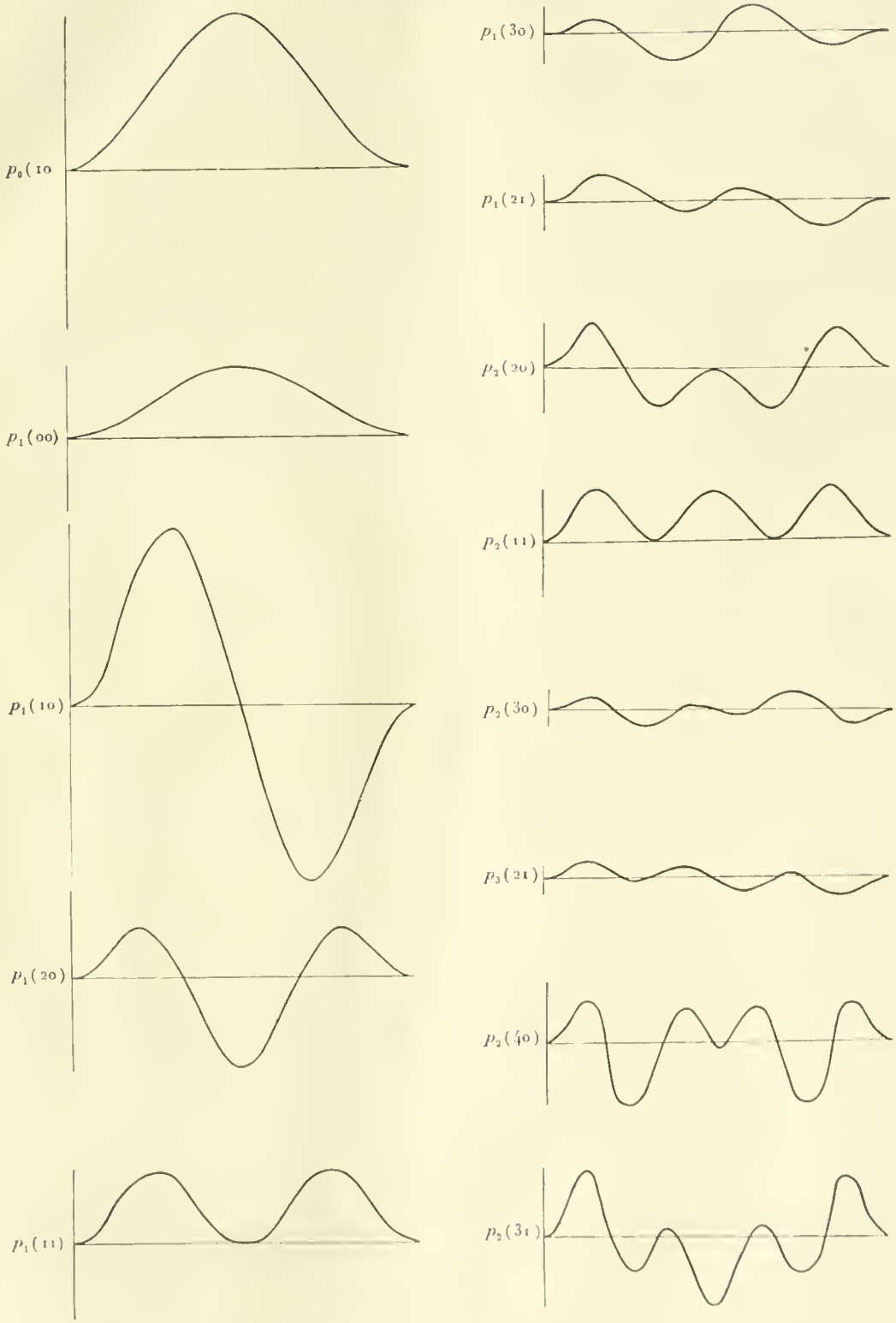


TABLE II. — $\eta(u, v)$ (*suite*).

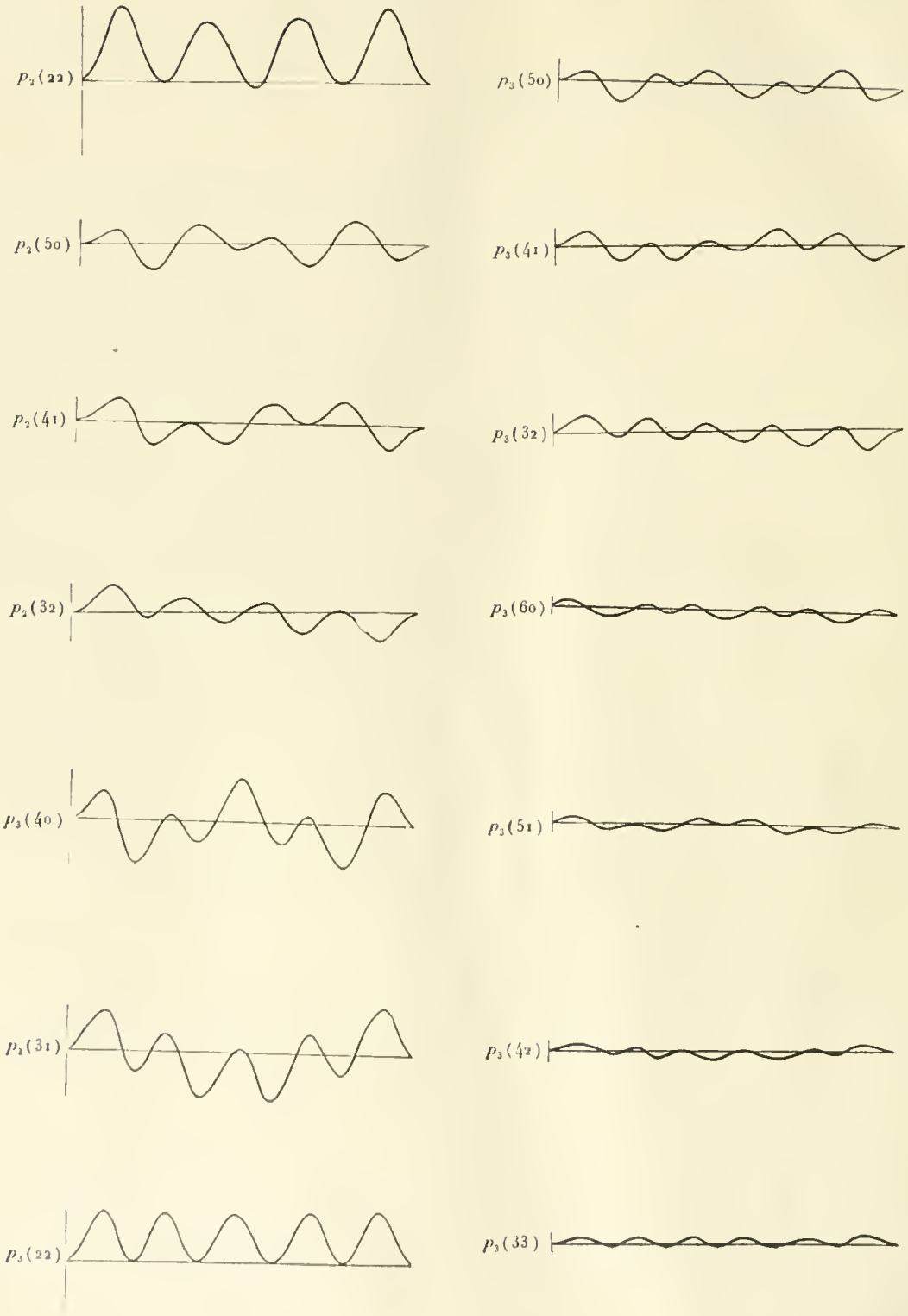


TABLE III. — $\pi(u_1, v_1)$.

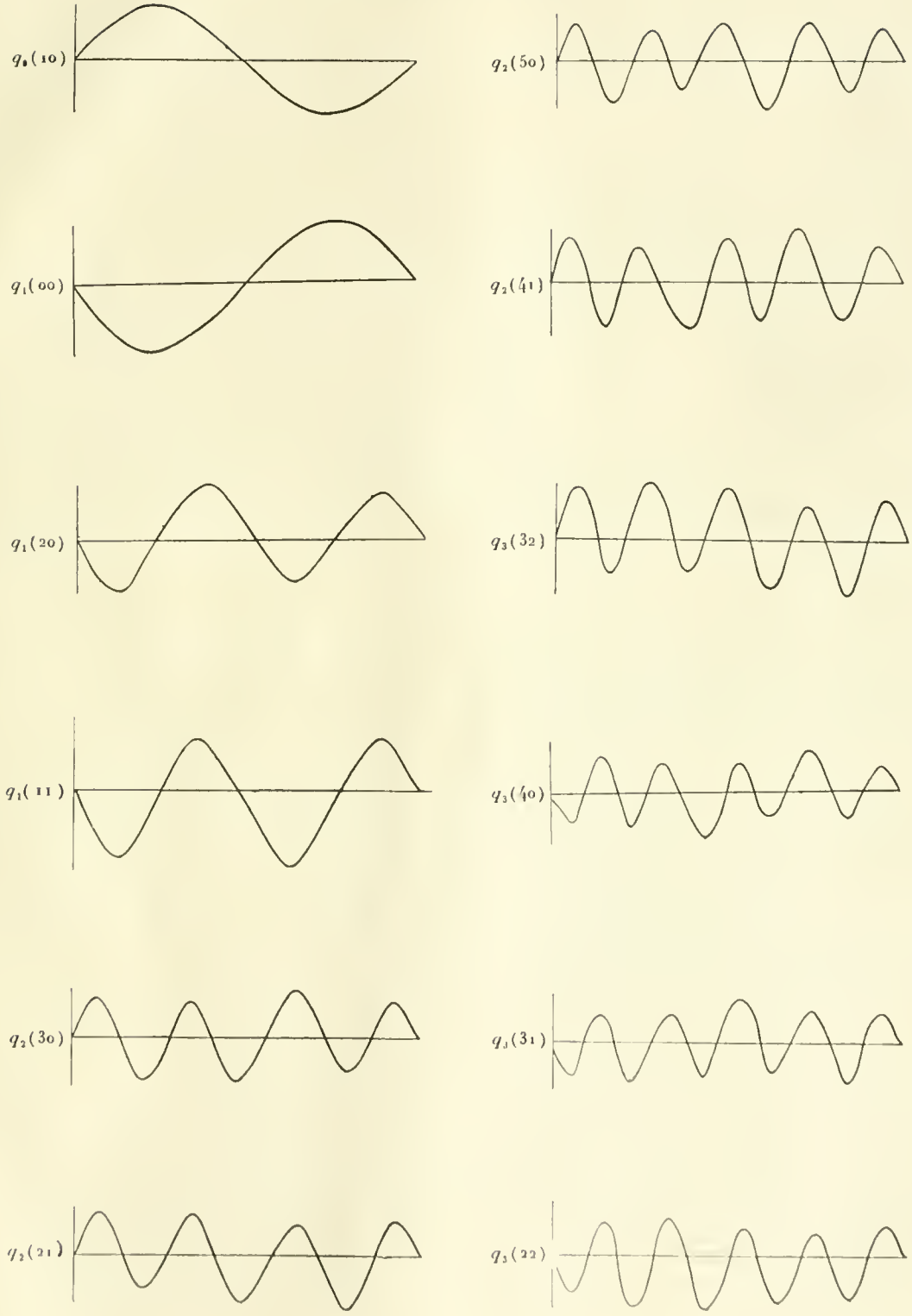


TABLE IV. — $\theta(u_1, v_1)$.

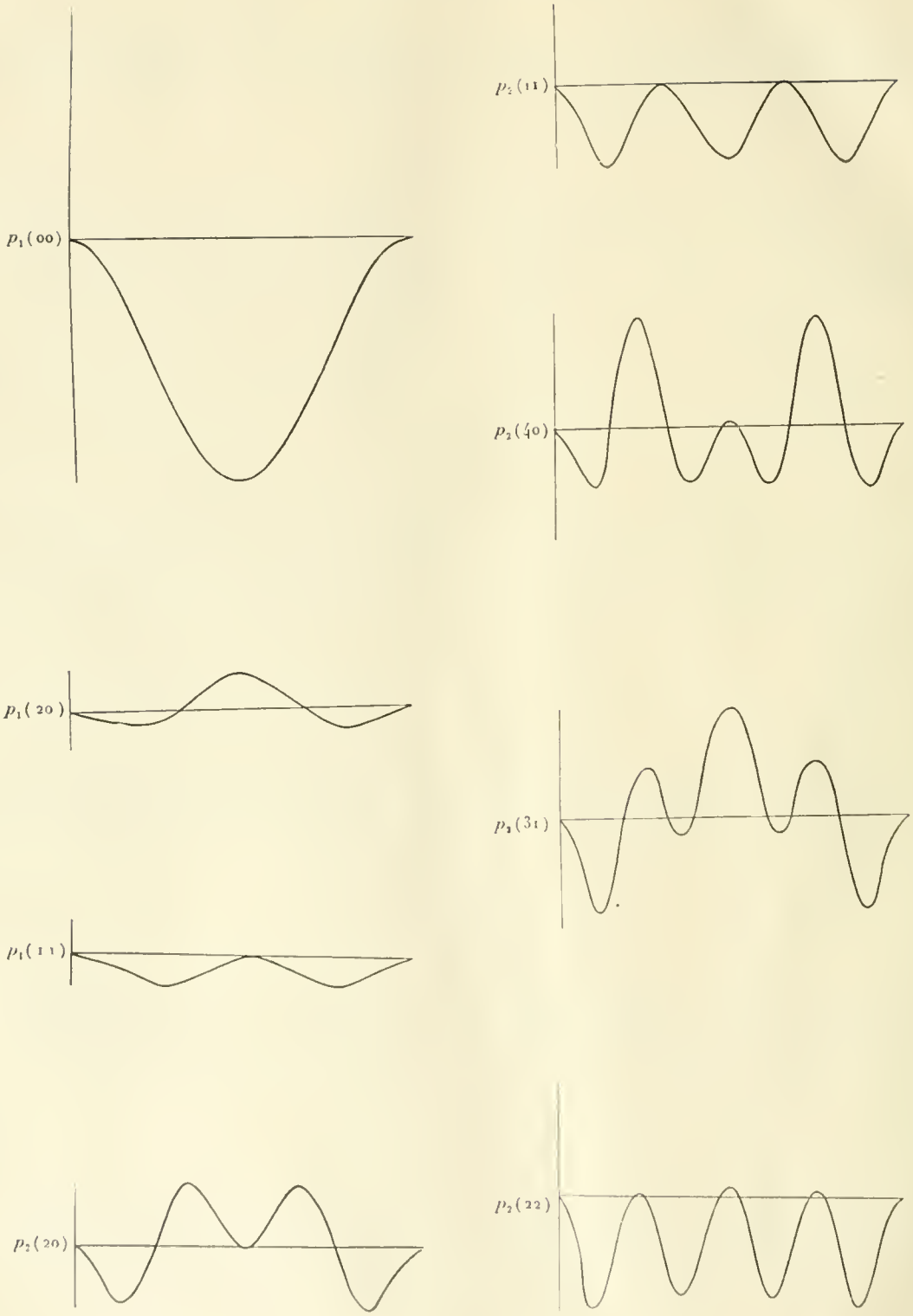


TABLE DES MATIÈRES.

SEPTIÈME SÉRIE. — TOME I.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.

(*Note de la Rédaction.*)

Pages.

[C7] Sur les fonctions permutables de première espèce de M. Volterra; par M. *Joseph Pérès* 1

[T7] Note sur le problème général de l'Électrodynamique; par M. *Pierre Duhem* 99

[D1a] Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues; par M. *Arnaud Denjoy* 105

[C] Sur quelques points de la théorie des invariants intégraux; par M. *E. Goursat* 241

[R7g] Sur le mouvement d'un point matériel, soumis à une force donnée, sur une surface fixe et dépolie; par M. *P. Woronetz*. 261

[S3] Comment le débit d'un tuyau de conduite affecté d'un rétrécissement notable, mais graduel, peut se déduire de l'abaissement de pression qui s'y produit le long de la partie rétrécie; par M. *J. Boussinesq* 277

[S3] Intéressant théorème de réciprocité dans les phénomènes permanents de filtration, dû à M. Umberto Puppini. Rapport sur le prix Boileau d'Hydraulique pour l'année 1915; par M. *J. Boussinesq* 285

[T2] Complément à un Mémoire du deuxième fascicule du *Journal de Mathématiques* pour 1912, sur la théorie géométrique des déplacements bien continus des corps déformables : remarques

Pages.

et calculs montrant que la complication des formules pour les grands déplacements est due non aux déformations, mais aux rotations; par M. *J. Boussinesq* 291

[U8] Sur les marées d'un bassin à parois verticales; par M. *François Jager* 297

[A3d] Quelques théorèmes concernant la relation entre les zéros d'un polynome et ceux d'un polynome de degré inférieur; par M. *B. Gonggrÿp* 353

[U4] Sur le développement des intégrales des trois corps (Première Partie); par M. *K. Bohlin* 367

FIN DU TOME I DE LA SEPTIÈME SÉRIE.

55694 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
J684
sér.7
t.1
Physical &
Applied Sci.
Serials

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

408